Derivadas Laterais - Exemplos

Seja $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 2 \\ -x+6 & \text{se } x > 2 \end{cases}$ Verifique se f é derivável no ponto 2. Caso seja, calcule $f'(2)$.

Resolução. Observe inicialmente que f é contínua em 2. Para verificar se f é derivável no ponto 2, é necessário calcular as derivadas laterais de f nesse ponto, pois a expressão que define f à esquerda não é a mesma que define f à direita de 2.

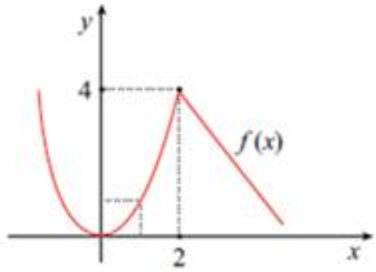
$$f_-'(2)=\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{(2+\Delta x)^2-4}{\Delta x}=4$$

Esclarecimento. Se $\Delta x \to 0^-$, então Δx é negativo e, portanto, $2+\Delta x<2$. Como $f(x)=x^2$ se $x<2$, segue que

$$f(2+\Delta x)=(2+\Delta x)^2.$$

$$f_+'(2)=\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-(2+\Delta x)+6-4}{\Delta x}=-1.$$

Como $f_-'(2) \neq f_+'(2)$, concluímos que f não é derivável em 2.



Calcule as derivadas laterais da função

$$f(x)=\begin{cases} x^2-8, & x \leq 3 \\ 4-x, & 3<x \leq 6 \end{cases}$$ nos pontos $x_0=3$ e 6.

Resolução: Temos que

$$f_+'(3)=\lim_{x \to 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x \to 3^+} \frac{4-x-(3^2-8)}{x-3}=\lim_{x \to 3^+} \frac{3-x}{x-3}.$$

$$=\lim_{x \to 3^+} -1=-1;$$

$$f_-'(3)=\lim_{x \to 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{(x-3)}=\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2-8-1}{x-3}=\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2-9}{x-3}$$

$$=\lim_{x \to 3^-} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x \to 3^-}(x+3)=6.$$

Como $f_+'(3) \neq f_-'(3)$, então f não é derivável em $x=3$, isto é, não existe $f'(x)$. Em $x_0=6$, temos

$$f_-'(6)=\lim_{x \to 6^-} \frac{f(x)-f(6)}{(x-6)}=\lim_{x \to 3^-} \frac{4-x-(-2)}{x-6}$$

$$=\lim_{x \to 3^-} \frac{6-x}{x-6}=-1.$$