

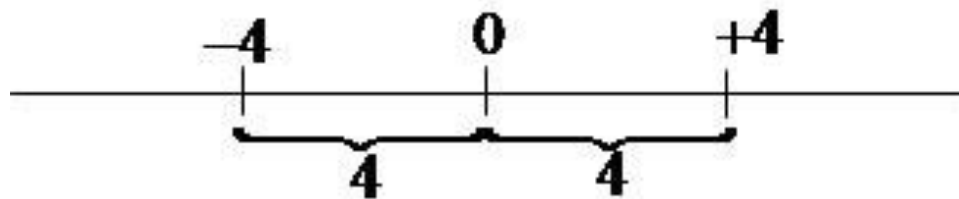


MÓDULO & EQUAÇÕES MODULARES

Aula IV - Parte 3

Módulo

- Módulo ou valor absoluto de um número estão associados a sua distância do ponto de origem, observe:



- Percebemos que a distância entre os números é a mesma, dessa forma dizemos que o valor absoluto dos números -4 e $+4$, indicados por $|-4|$ e $|+4|$, será 4.



Módulo

- O módulo ou valor absoluto de um número x pode ser indicado pelo próprio x , se x é positivo ou nulo, e o simétrico de x , se x é negativo. Observe a conclusão geral:

$$|x| = \begin{cases} x, & \rightarrow x \geq 0 \\ -x, & \rightarrow x < 0 \end{cases}$$



Exemplos

- $|+3| = 3$ e $|-3| = -(-3) = 3$
- $|10| = 10$ e $|-10| = -(-10) = 10$
- $|x - 4| = x - 4$, se $x - 4 \geq 0$, ou seja, $x \geq 4$
 $- (x - 4)$, se $x - 4 < 0$, ou seja, $x < 4$



Equações modulares

- Chamamos de equações modulares as equações em que aparecem módulos de expressões que contêm incógnita. Exemplos:
 - $|x| = 7$
 - $|x + 6| = x + 6$
 - $|x - 3| + 4x = 7$
 - $|x + 2| = 4$



Propriedades

- Algumas propriedades são importantes para aplicarmos em soluções de equações modulares. Essas são:
 - $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 - $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$
 - $|x| \geq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 - $|x| \geq |-x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 - $|x^2| = |x|^2 = x^2$
 - $|x + y| \leq |x| + |y|$
 - $|x - y| \geq |x| - |y|$
 - $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
 - $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
 - $||x| - |y|| \leq |x - y|$



Exemplos

1) Vamos resolver a seguinte equação $|3x + 1| = 2$:

- Pela definição de módulo, podemos dizer que:

$$|3x + 1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 = 2 \\ \text{ou} \\ 3x + 1 = -2 \end{cases}$$

- O que nos dá como solução, o valor de x nas duas hipóteses, que são equações do primeiro grau:

$$\begin{cases} 3x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \\ \text{ou} \\ 3x + 1 = -2 \Leftrightarrow x = -1 \end{cases}$$

- Logo a solução pode ser escrita como:

$$S : \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = -1 \right\} \quad \text{ou} \quad S : \left\{ -1; \frac{1}{3} \right\}$$

Exemplos

2) Resolveremos agora uma equação modular do 2º grau:

$$|x^2 - 8x + 13| = 1$$

- Pela definição:
$$\begin{cases} x^2 - 8x + 13 = 1 \\ \text{ou} \\ x^2 - 8x + 13 = -1 \end{cases}$$

- Resolvendo separadamente temos:

$x^2 - 8x + 13 = 1$	$x^2 - 8x + 13 = -1$
$x^2 - 8x + 12 = 0$	$x^2 - 8x + 14 = 0$
$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 12$	$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 14$
$\Delta = 64 - 48$	$\Delta = 64 - 56$
$\Delta = 16$	$\Delta = 8$
$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2}$	$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{2}}{2}$
$x_I = 6$	$x_I = 4 + \sqrt{2}$
$x_{II} = 2$	$x_{II} = 4 - \sqrt{2}$



Exemplos

- Perceba que neste caso, como tínhamos duas equações do segundo grau como as hipóteses dos dois valores dos módulos, obtemos assim 4 soluções distintas, logo, podemos dizer que a solução geral é a junção de todos os valores de x :

$$S : \{2; 4 - \sqrt{2}; 4 + \sqrt{2}; 6\}$$



Exemplos

- 3) Há também equações modulares que possuem mais de uma expressão que estão dentro de um módulo, por exemplo:

$$|3x + 2| = |6 - x|$$

- Neste caso, a definição dos módulos continua valendo, mas é necessário escolher um dos extremos da equação para tomar como o módulo principal, ou seja:

$$\begin{cases} 3x + 2 = 6 - x \\ \text{ou} \\ 3x + 2 = -(6 - x) \end{cases}$$

- ou também podemos escolher:

$$\begin{cases} 3x + 2 = 6 - x \\ \text{ou} \\ -(3x + 2) = 6 - x \end{cases}$$



Exemplos

- Resolvendo qualquer uma das duas possíveis representações do valor do módulo, o resultado final será o mesmo, basta resolver as equações do primeiro grau para obter os valores:

$$S: \{-4 ; 1\}$$



Exercícios

Resolver os exercícios 8 a 11 da lista VI.



Tarefa

Resolva o seguinte exercício da lista VI e envie pelo moodle:

10. Resolver em \mathbb{R} as seguintes equações:

a) $|3x + 2| = |x - 1|$

b) $|4x - 1| - |2x + 3| = 0$

c) $|x^2 + x - 5| = |4x - 1|$

d) $|x^2 + 2x - 2| = |x^2 - x - 1|$



Referências

- BRASIL ESCOLA: **Matemática: Equação modular**. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/equacao-modular.htm>
Acesso em: 23 set. 2020.
- INFOESCOLA. **Matemática: Equação modular**. Disponível em: <https://www.infoescola.com/matematica/equacao-modular/> Acesso em: 23 set. 2020.