



CÍRCULO MATEMÁTICO DA UFSC

Prof. Raphael da Hora
Encontro do dia 08/06/2022

Nome: _____

TEORIA DOS GRAFOS

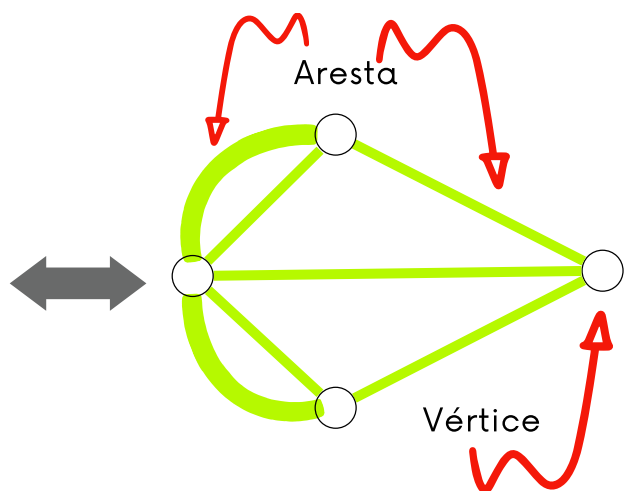
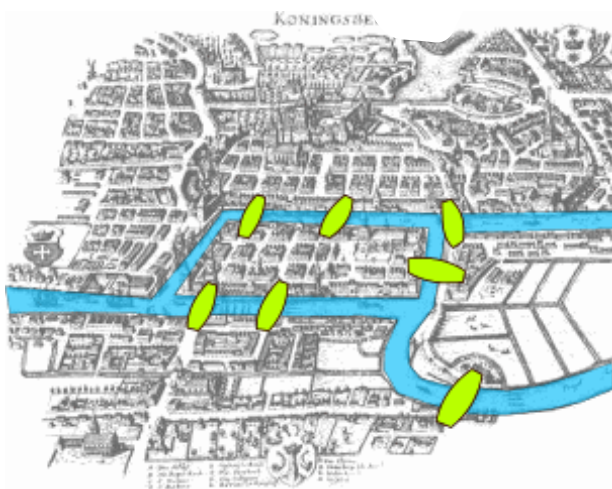
A teoria dos grafos é um campo da matemática que procura estudar objetos chamados grafos. As idéias e o entendimento adquiridos com o estudo dos grafos podem ser aplicados a muitos outros problemas. Exemplos desses problemas incluem combinar doadores de órgãos com pacientes ou encontrar os melhores caminhos do ponto A ao B (como faz um GPS). Hoje veremos alguns algoritmos famosos que nos ajudam a encontrar as melhores ou mais curtas redes e rotas.

PROBLEMAS DO ENCONTRO

AS SETE PONTES DE KÖNIGSBERG

Königsberg (agora Kaliningrado, Rússia) era uma antiga cidade da Prússia. Esta cidade é dividida pelo rio Prególia em quatro territórios conectados por sete pontes. No século XV, as pessoas de Königsberg costumavam sair e passear pela cidade e, com o tempo, criaram o seguinte quebra-cabeça:

É possível andar pela cidade atravessando todas as pontes, mas usando cada ponte uma vez e apenas uma vez?



Este problema permaneceu sem solução por duzentos anos. Em 1736 uma solução com uma explicação elegante foi encontrada pelo grande matemático Leonhard Euler (Basel 1707 - São Petersburgo 1783). Com sua solução, Euler criou um ramo da matemática que agora é conhecido como teoria dos grafos.

APERTOS DE MÃO NUMA FESTA

Lucas, Ryan, Vincente, Emily e Nadine vão a uma festa. Quando chegam lá, querem apertar as mãos, mas só têm tempo de apertar a mão de duas outras pessoas. Desenhe um grafo para mostrar como isso pode acontecer. Quantos apertos de mão existem?



OPÇÕES DE LANCHE

O refeitório da escola está tentando melhorar as vendas do lanche, adicionando opções em vez de oferecer apenas uma opção. As opções de hoje para o lanche são pão de queijo, sanduíche de presunto e bolo de cenoura, já as opções de fruta são maçã, banana, goiaba ou melão. Quantas combinações diferentes de lanche são possíveis? Desenhe e rotule um grafo para mostrar o resultado.

O PROBLEMA DA FESTA

Há 5 pessoas em uma festa, Juca, Kátia, Luís, Mina e Nino. Cada pessoa lá pode conhecer exatamente 2 pessoas? 3 pessoas?



Aqui, assumimos que se a pessoa A conhece a pessoa B, então a pessoa B também conhece a pessoa A.



EXPERIMENTO DE CIÊNCIAS



Quatro alunos estão trabalhando juntos em um experimento para a aula de ciências. O experimento consiste em testar a vida útil de quatro marcas diferentes de baterias. Cada aluno deve ligar para todos os outros alunos do grupo para relatar seus resultados. Quantas ligações serão feitas? Construa um grafo para modelar esses resultados.

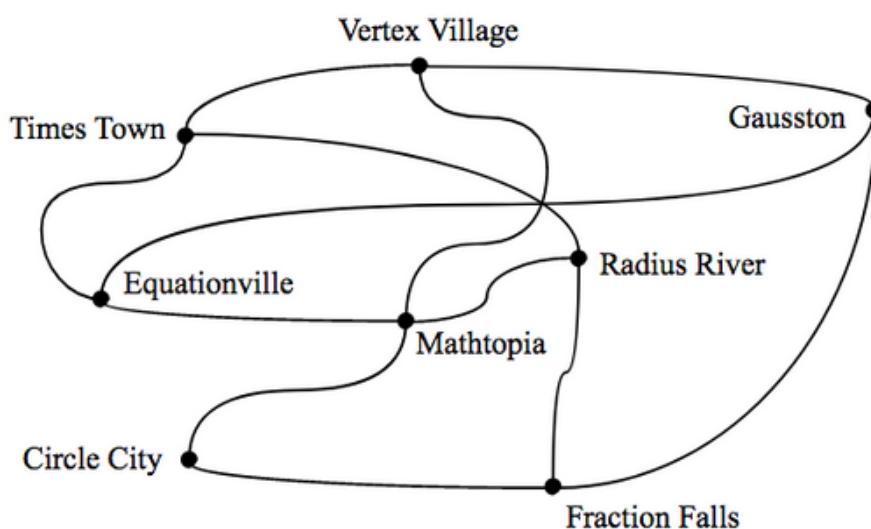
O número de arestas que estão ligadas a um vértice é chamado de grau do vértice.

 **Teorema.** A soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas!

CICLO HAMILTONIANO

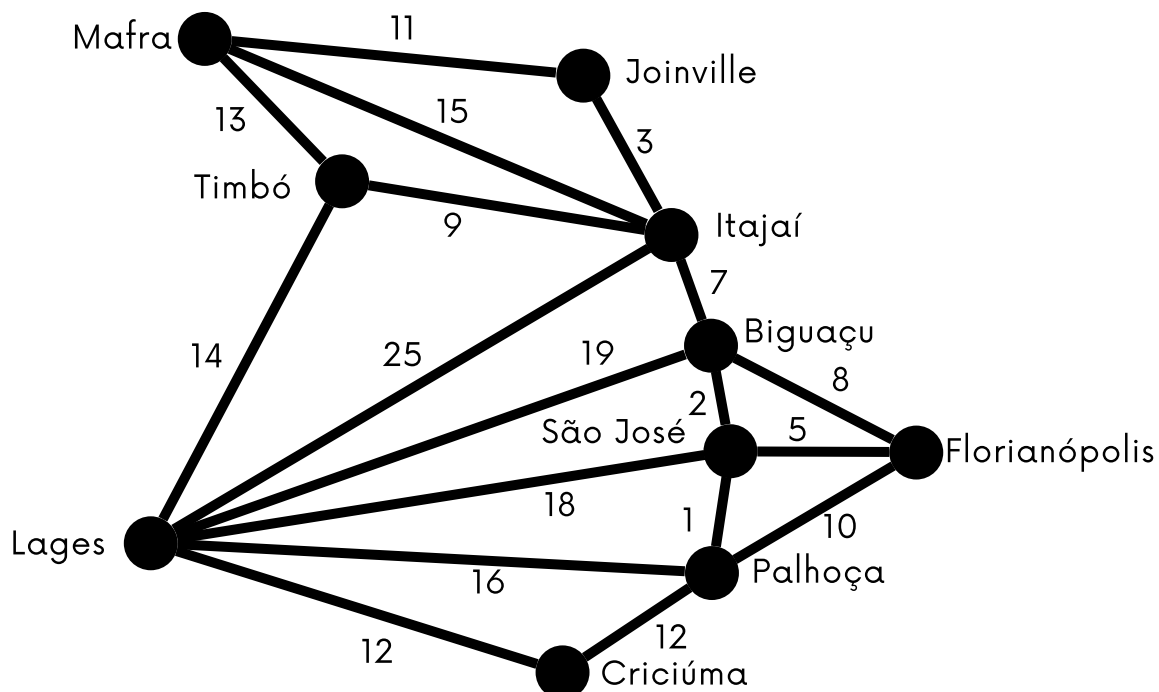


Euler Petróleo é uma rede de postos de gasolina no país de Mathisfun. O CEO da empresa, Leonhard, quer visitar todos os seus postos de gasolina no país para garantir que cada um esteja abastecido com combustível suficiente. No entanto, ele não quer visitar nenhuma cidade mais de uma vez, pois é um homem muito ocupado. Sugira uma rota que Leonhard poderia tomar da sede na capital Mathtopia, passando por cada cidade exatamente uma vez, e retornando à capital. Observe que, apesar da intersecção de três rodovias no centro do país, não há como mudar de uma estrada para outra (ou seja, não há estrada direta de Mathtopia a Gausston, etc.)



REDE FERROVIÁRIA CATARINENSE

No grafo abaixo, tente conectar todas as cidades com ferrovias pelo menor custo total. O número de cada aresta representa o custo em dezenas de milhões de reais.



ALGORITMO DE PRIM

Em vez de simplesmente tentar todas as combinações possíveis, os matemáticos desenvolveram um algoritmo ou uma série de etapas a serem seguidas para determinar uma chamada árvore geradora mínima. Um desses algoritmos é conhecido como Algoritmo de Prim. Os passos deste algoritmo são os seguintes:

Passo 1. Selecione um vértice inicial (no nosso exemplo, escolheremos Itajaí);

Passo 2. Chame S o conjunto de todos os vértices atualmente conectados à sua árvore. Chame V todos os outros vértices. (Observe que na primeira vez que você chegar a esta etapa, S será apenas seu vértice inicial);

Passo 3. Se S contiver todos os vértices do grafo, pare. Você tem sua árvore geradora mínima!

Passo 4. Encontre todas as arestas com uma extremidade em S e uma extremidade em V . Selecione a aresta com o menor peso e adicione-a à sua árvore. Se houver mais de uma aresta com o menor peso, você pode escolher qualquer uma delas para adicionar. (Por enquanto, para adicionar uma aresta à sua árvore, apenas circule ou destaque a aresta);

Passo 5. Volte para a etapa 2

BRINCADEIRA MATEMÁTICA



Caminhos Eulerianos

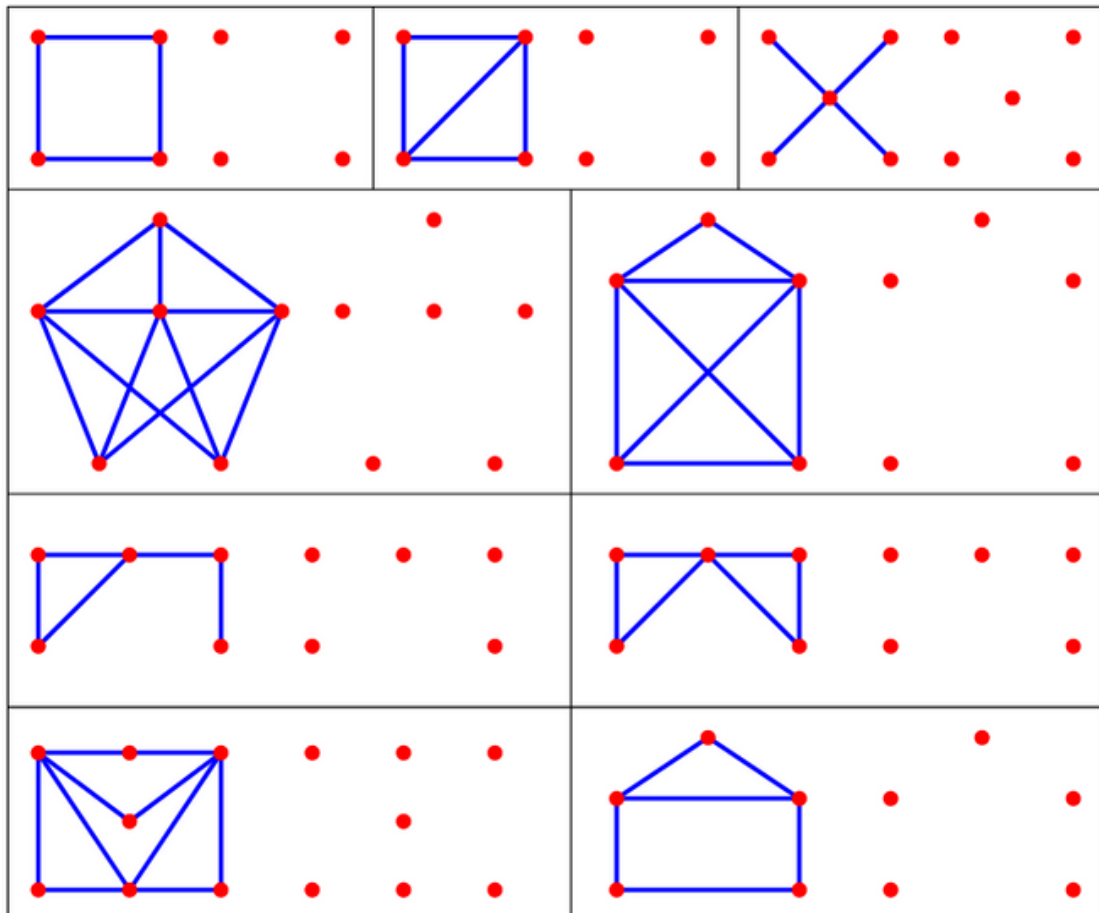
Um caminho Euleriano em um grafo é um caminho que percorre o grafo usando cada aresta exatamente uma vez. Além disso, se o caminho começa e termina no mesmo vértice, chamamos de ciclo Euleriano.

Veja, por exemplo, os passos para desenhar uma estrela de cinco pontas sem tirar o lápis do papel e sem refazer a mesma linha.



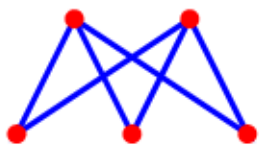

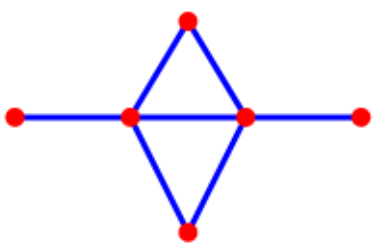
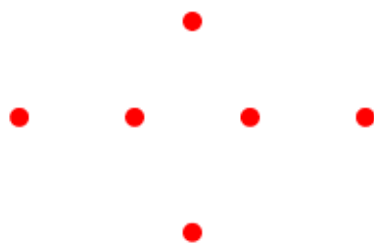
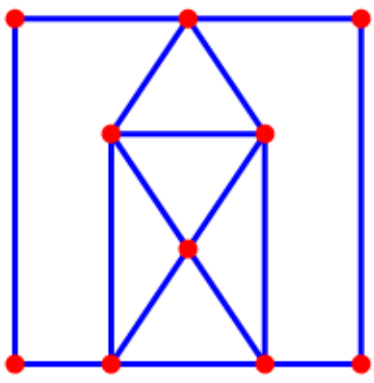
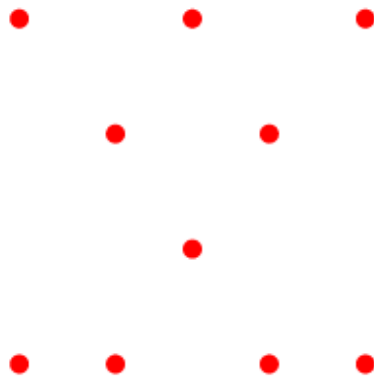
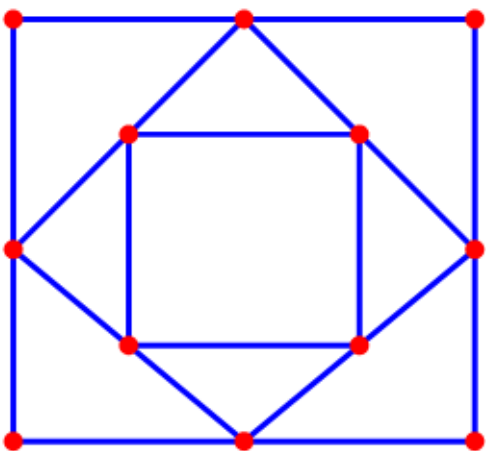
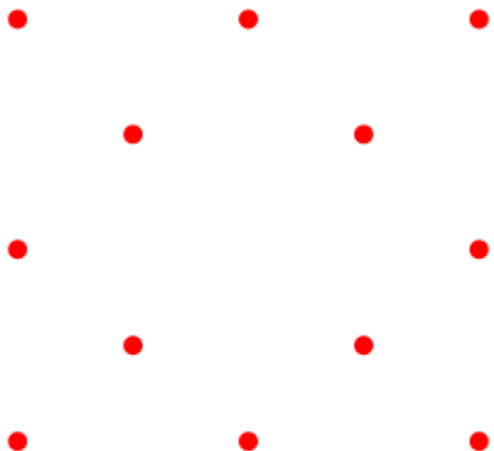
COMO JOGAR

Você pode desenhar as formas abaixo sem levantar o lápis do papel e sem refazer nenhuma linha? Se não, pode explicar por quê?



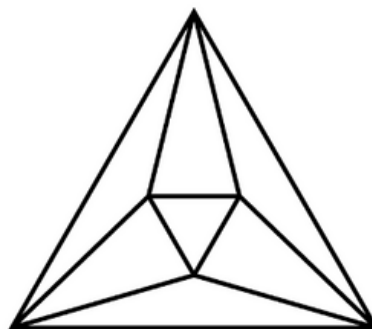
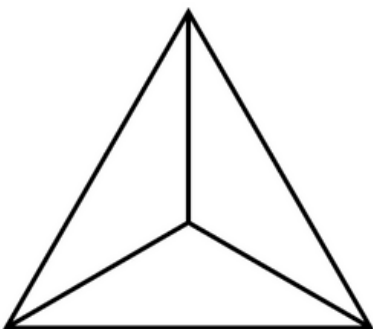
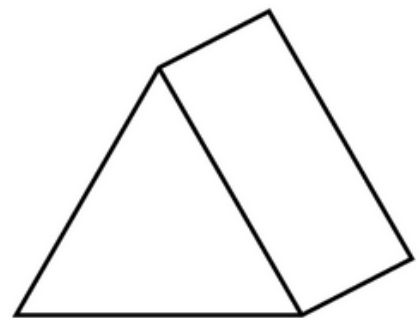
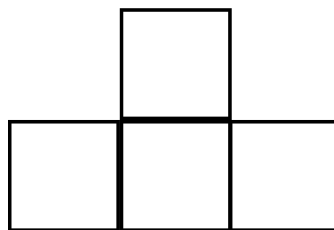
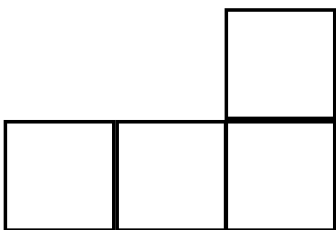
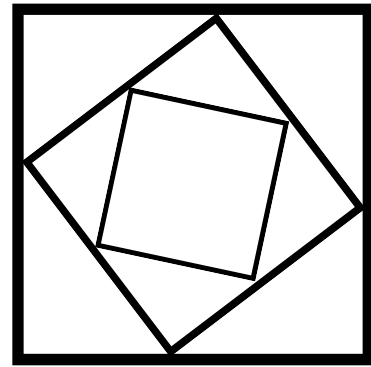
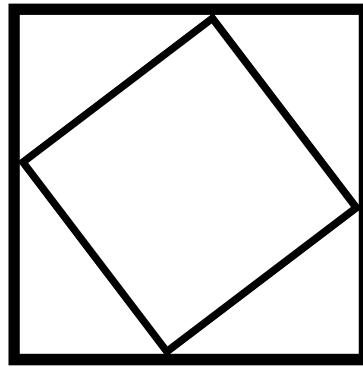
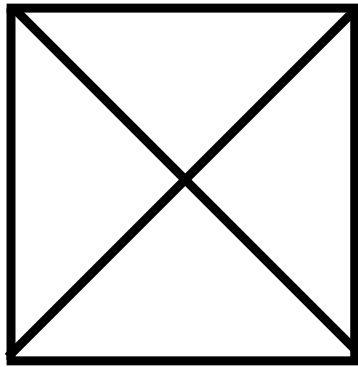
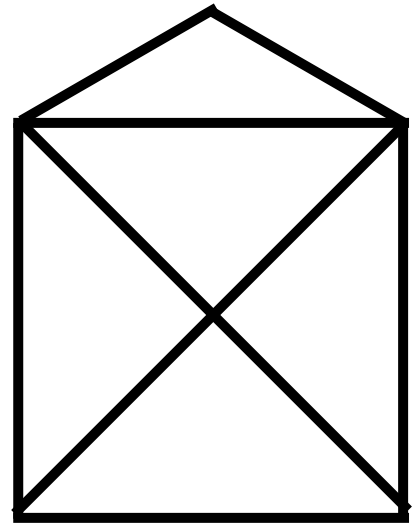
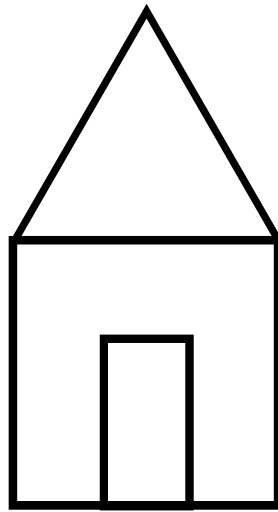
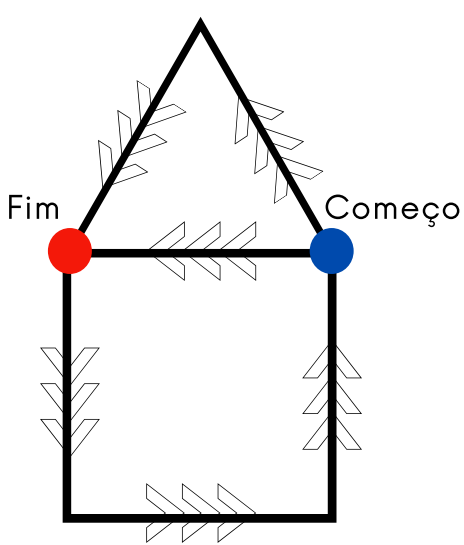
CAMINHOS EULERIANOS

Tente desenhar as formas abaixo sem levantar o lápis do papel e sem refazer nenhuma linha.

CAMINHOS EULERIANOS

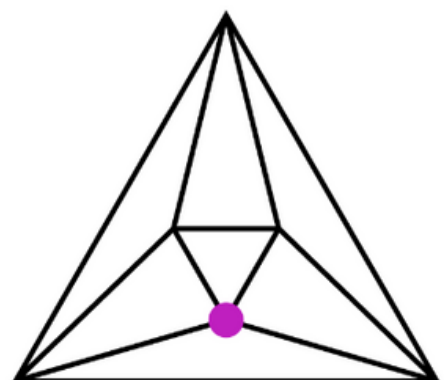
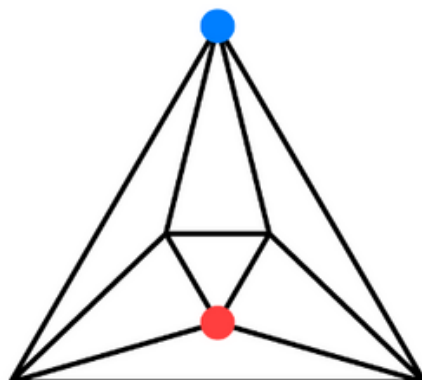
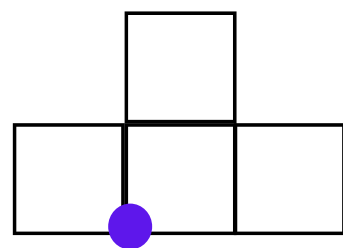
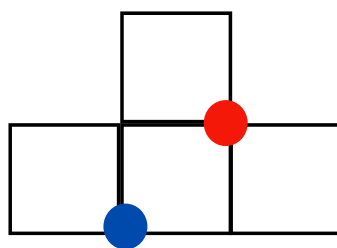
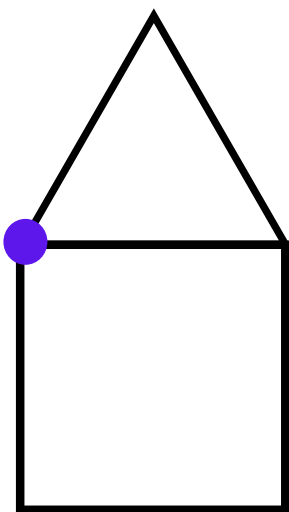
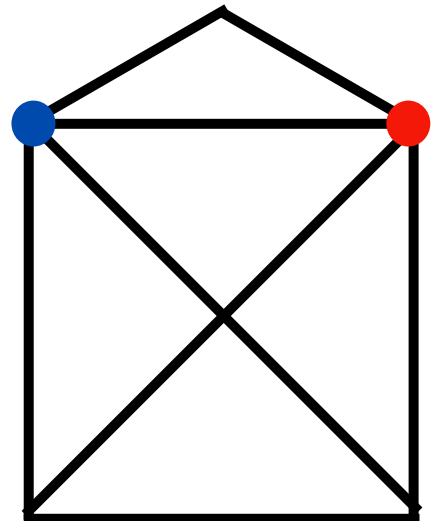
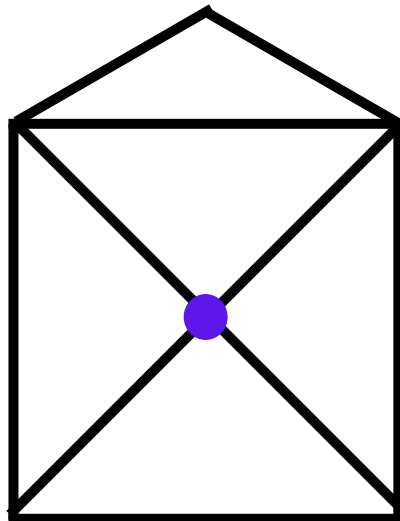
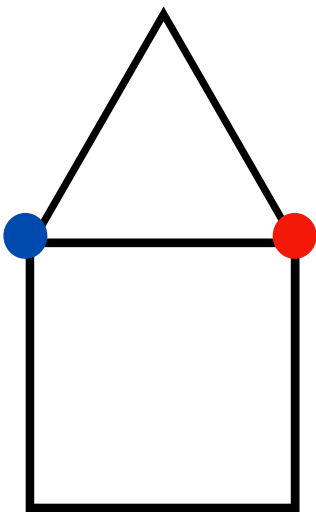
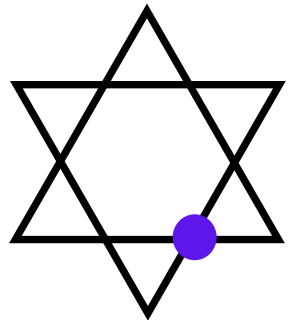
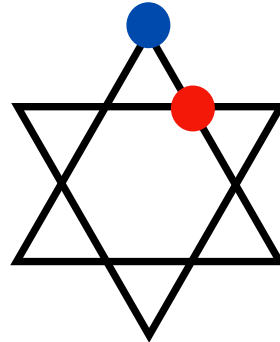
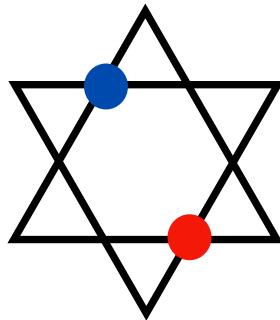
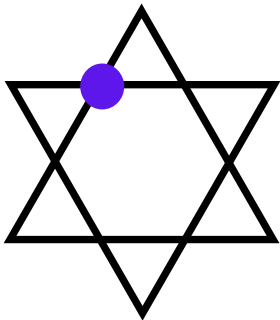
Tente desenhar as formas abaixo sem levantar o lápis do papel e sem refazer nenhuma linha. Veja o exemplo abaixo, do lado esquerdo.

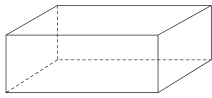


CICLOS EULERIANOS

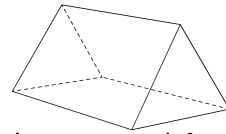
Para cada figura abaixo:

- Se houver um ponto azul e um ponto vermelho, tente desenhar a figura começando no ponto azul e terminando no ponto vermelho;
- Se houver um ponto roxo, tente desenhar o rabisco começando e terminando no ponto roxo.

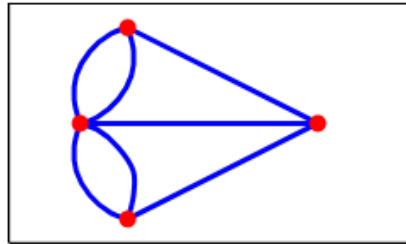




FÓRMULA DE EULER



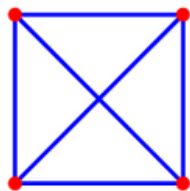
Quando desenhamos um grafo no plano, ele divide o plano em diferentes regiões. Por exemplo, o grafo abaixo tem 4 vértices (V), 7 arestas (E) e 5 regiões (R).



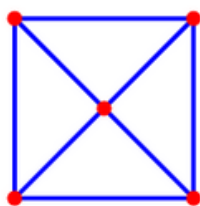
Euler descobriu algo muito especial sobre o cálculo de $V - E + R$. Você consegue descobrir o que percebeu?

 $V - E + R = \bigcirc$	 $V - E + R = \bigcirc$	 $V - E + R = \bigcirc$
 $V - E + R = \bigcirc$	 $V - E + R = \bigcirc$	 $V - E + R = \bigcirc$
 $V - E + R = \bigcirc$	 $V - E + R = \bigcirc$	 $V - E + R = \bigcirc$

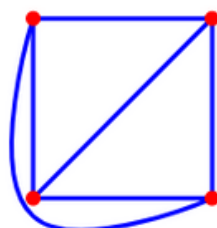
O que acontece com os grafos abaixo?



$$\bigcirc - \bigcirc + \bigcirc = \bigcirc$$



$$\bigcirc - \bigcirc + \bigcirc = \bigcirc$$



$$\bigcirc - \bigcirc + \bigcirc = \bigcirc$$

LISTA DE EXERCÍCIOS

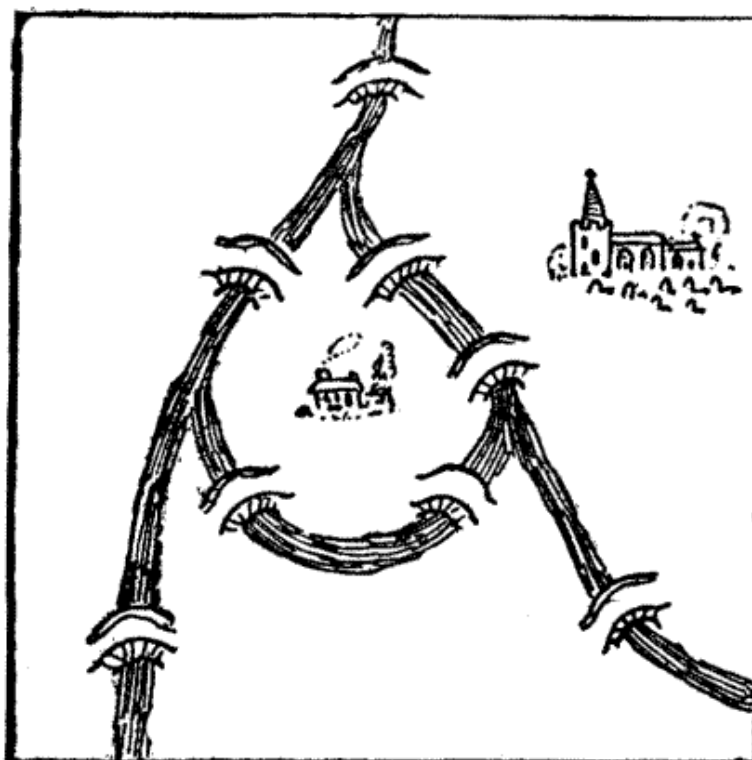
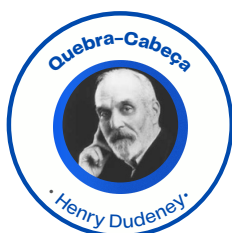
COLEGAS DE TURMA

Na turma do José existem 21 crianças. É possível que antes do começo das aulas, cada criança conheça exatamente 7 outras crianças?



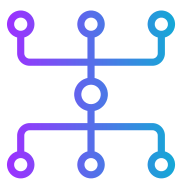
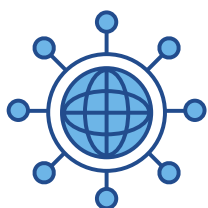
O QUEBRA-CABEÇA DO PÁROCO

O Pároco era um homem muito devoto e bom. Suas virtudes e caridade o tornaram amado por todo o seu rebanho, a quem apresentou seus ensinamentos com paciência e simplicidade. Nova Trento era sua paróquia, e mesmo havendo casas muito separadas, ele não negligenciou nada por chuva ou trovão. É com suas visitas paroquiais que o quebra-cabeça do pároco realmente lida. Ele fez um plano de parte de sua paróquia, por onde corria um pequeno rio que se juntava ao mar algumas centenas de quilômetros ao sul. A caminho da igreja, costuma visitar vários de seu rebanho e, ao fazê-lo, passa por cada uma das oito pontes uma vez e nada mais. Você pode encontrar o caminho, desta forma, da casa à igreja, sem sair da cidade?



REDE DE COMPUTADORES

Suponha que em sua escola, seis computadores em seis salas diferentes precisem estar conectados em rede. Sua escola quer a “melhor” rede possível, ou seja, use a menor quantidade de fios para conectar todos os computadores. Observe que a conexão entre dois computadores pode ser vinculada direta ou indiretamente através de outro computador. A tabela abaixo mostra quais computadores podem ser conectados diretamente, bem como quanto de fio é necessário em metros, onde os computadores são letras e as distâncias em metros. Qual é a quantidade mínima de fio necessária para conectar todos os seis computadores para que cada computador esteja ligado direta ou indiretamente a qualquer outro computador?

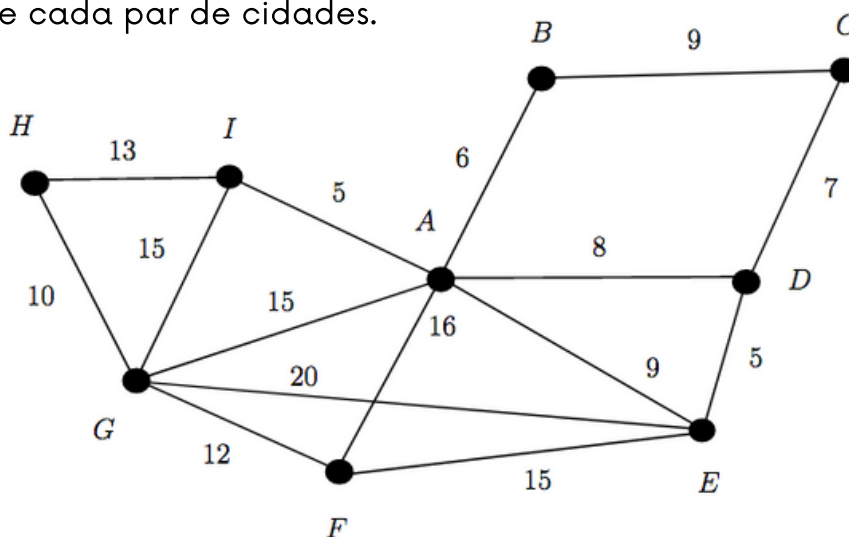


	A	B	C	D	E	F
A	-	9	-	-	-	3
B	9	-	8	-	8	11
C	-	8	-	3	5	-
D	-	-	3	-	6	11
E	-	8	5	6	-	9
F	3	11	-	11	9	-



EMERGÊNCIA EM ESTRADAS

Suponha que, ao fazer planos para tempestades de inverno, o governo de seu estado precise de um projeto para reparar as estradas em caso de emergência. Você recebe um mapa das cidades do seu estado e as principais estradas que existem entre elas. Você é solicitado a elaborar um plano que conserte o menor número de quilômetros de estrada, mas mantenha uma rota aberta entre cada par de cidades.



MENOR CUSTO DE CHAMADA

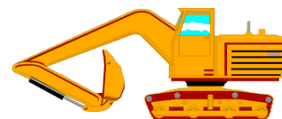
Suponha que uma família com sete membros em diferentes partes do país tenha um parente que vive no exterior. A família quer montar uma rede de telefone celular para que todos saibam as últimas notícias sobre o parente no exterior, pelo menor custo total. A grade abaixo mostra o custo de um telefonema de 15 minutos entre cada par de membros da família. Qual é o custo total da rede de chamadas mais barata que eles podem configurar?



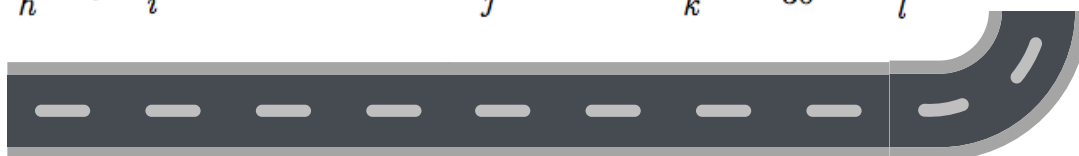
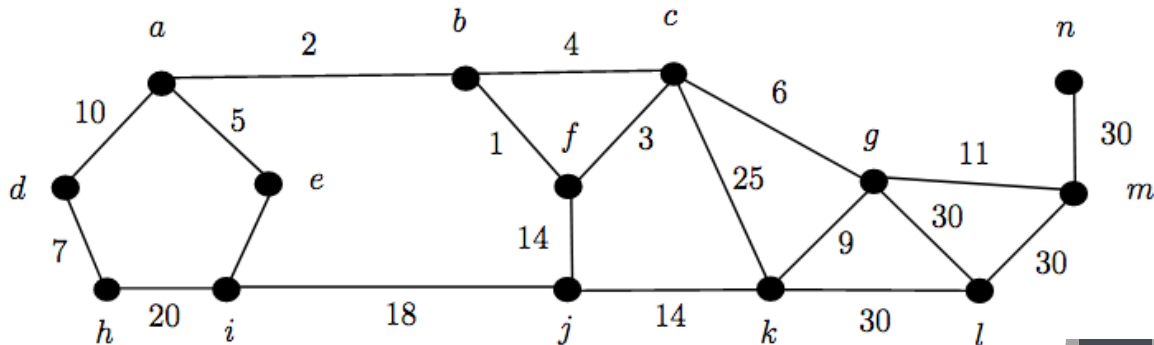
	Alice	Bruno	Heitor	Karen	Olívia	Paulo	Rita
Alice	-	R\$3,50	R\$4,75	-	R\$4,10	-	R\$5,10
Bruno	R\$3,50	-	-	R\$2,50	-	R\$4,10	R\$3,40
Heitor	R\$4,75	-	-	R\$2,95	-	R\$4,40	-
Karen	-	R\$2,50	R\$2,95	-	R\$4,25	-	R\$3,40
Olívia	R\$4,10	-	-	R\$4,25	-	-	-
Paulo	-	R\$4,10	R\$4,40	-	-	-	-
Rita	R\$5,10	R\$3,40	-	R\$3,40	-	-	-



CONSTRUINDO ESTRADAS



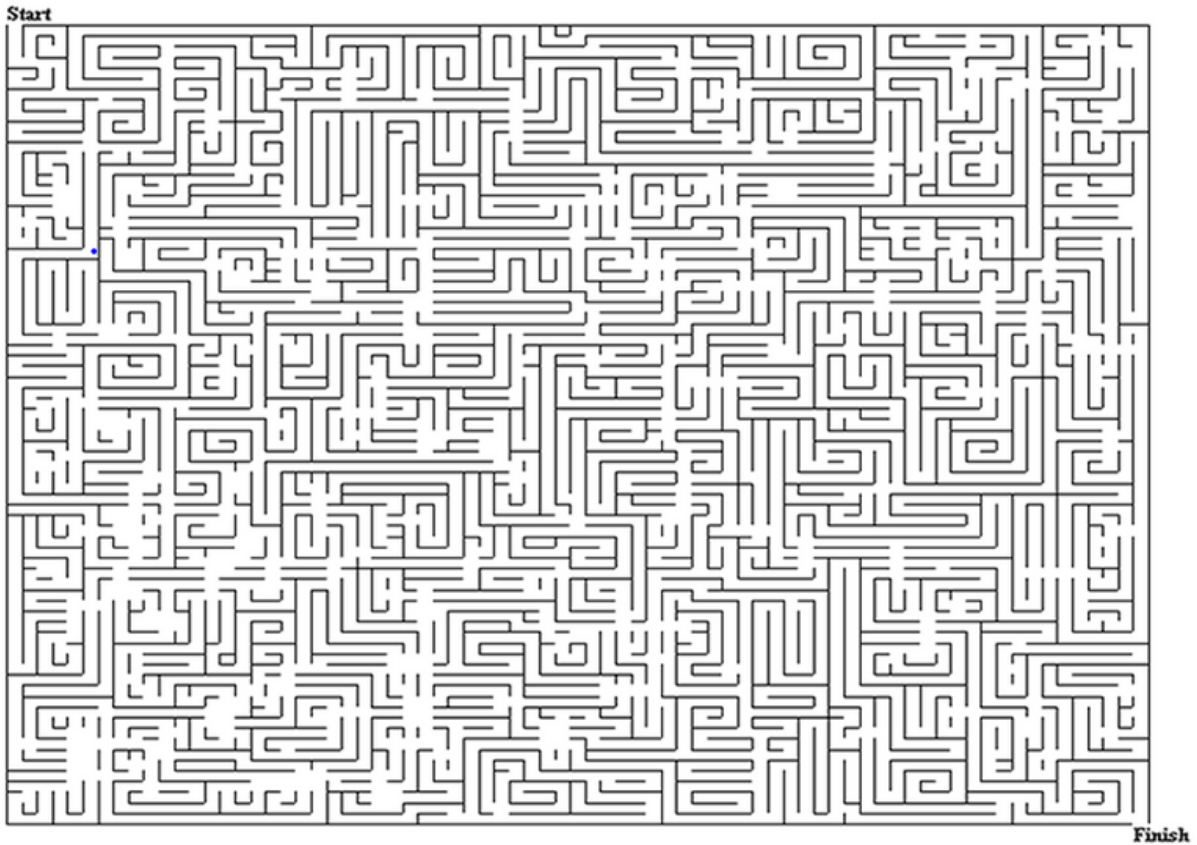
Suponha que para o grafo abaixo as arestas representem possíveis rodovias que podem ser construídas para unir pares de cidades. Suponhamos que os pesos (números) sejam os custos projetados em milhões de reais para construir as rodovias. A ideia é construir a malha rodoviária mais barata para manter o orçamento do estado baixo.



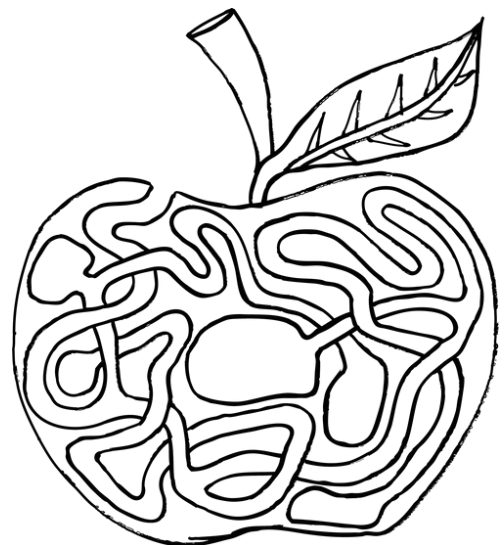
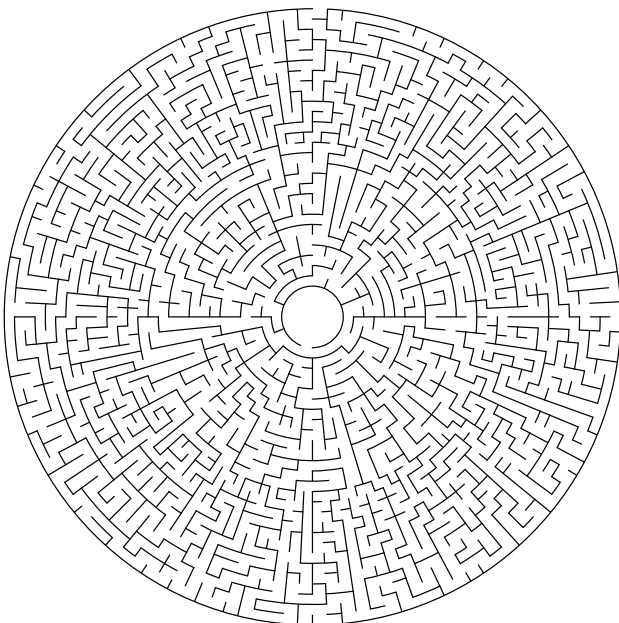
LABIRINTOS

Um labirinto é uma coleção de caminhos com uma entrada e uma saída. Alguns dos caminhos resultam em becos sem saída! Seu trabalho é encontrar o caminho da entrada até a saída. Também podemos usar algoritmos para resolver labirintos! A regra do seguidor de parede. Mantenha uma mão em contato com uma parede do labirinto. Você não se perderá e chegará à outra saída.

Mazes - Hard #1



www.mazes.ws



PERSONALIDADES MATEMÁTICAS



Gladys West

Gladys West sabia desde jovem que não queria ser agricultora. Mas a matemática, nascida em 1930 no condado de Dinwiddie, na Virgínia, E.U.A., ainda precisava ajudar na colheita da pequena fazenda de sua família. Ela sabia que a educação seria sua passagem para a liberdade.

O que ela não poderia adivinhar era que esse foco quebraria as percepções das mulheres negras da época e até levaria à invenção de uma de nossas invenções mais usadas - o GPS, o sistema de posicionamento global.

Seus pais tentaram economizar algum dinheiro para mandá-la para a Universidade, mas contas inesperadas continuavam chegando. Se West queria estudar, ela precisava encontrar uma maneira de pagar pela Universidade. Então, um professor anunciou que o estado daria uma bolsa de estudos para os dois melhores alunos do ano dela. Era sua oportunidade de ouro.

“Comecei a fazer tudo para estar no topo”, disse West. “E com certeza, quando terminei a escola, consegui.” A bolsa de estudos permitiu que West frequentasse o Virginia State College, uma universidade historicamente negra.

Ela decidiu se formar em matemática porque era um assunto muito respeitado. A maioria dos estudantes eram homens, mas ela não deu muita atenção a eles. “Eu sabia no fundo do meu coração que nada estava me atrapalhando.”

Depois de ser formar e concluir o seu mestrado, ela recebeu uma oferta de emprego em uma base naval em Dahlgren, Virgínia. “Senti orgulho de mim mesma como mulher, sabendo que posso fazer o que posso. Mas como mulher negra, esse é outro nível em que você precisa provar para uma sociedade que não a aceitou pelo que você é. O que eu fiz foi continuar tentando provar que eu era tão boa quanto os outros”, disse ela. “Não há diferença no trabalho que podemos fazer.”