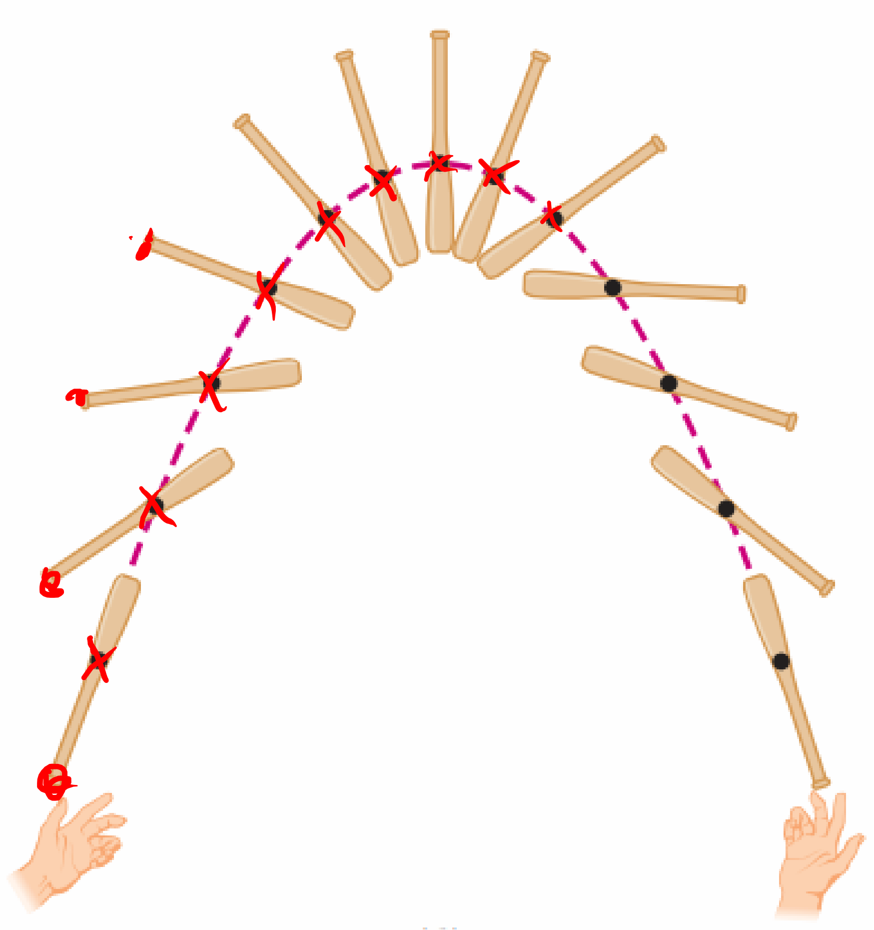
# Módulo III – CENTRO DE MASSA E MOMENTO LINEAR

Yuri Zanerippe Miguel

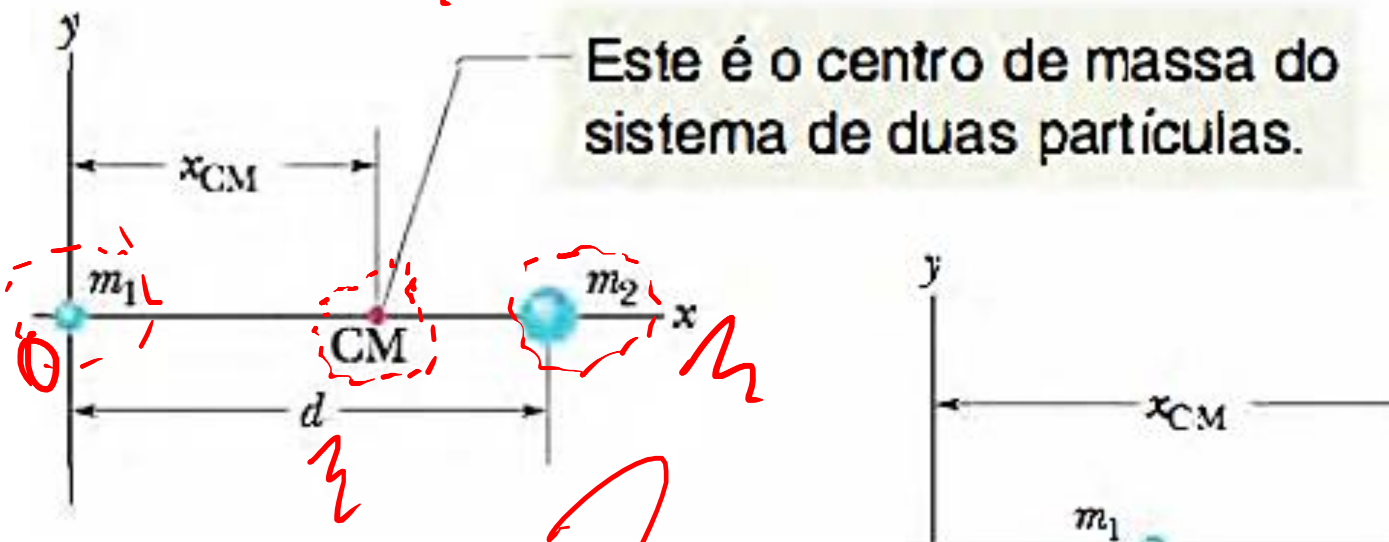
# O Centro de Massa

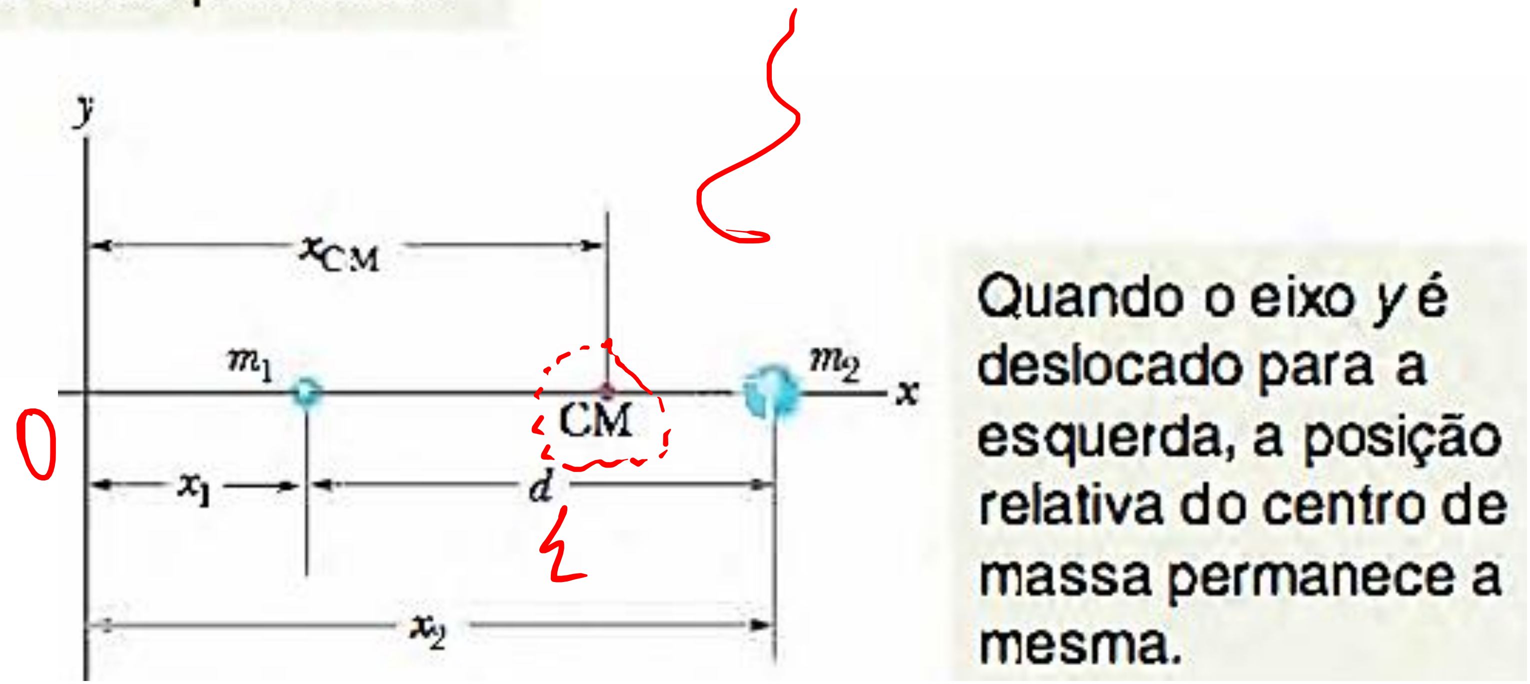
O centro de massa de um sistema de partículas é o ponto que se move como se toda a massa do sistema estivesse concentrada nesse ponto e todas as forças externas estivessem aplicadas nesse ponto.



# O Centro de Massa

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1+m_2x_2 \ldots m_nx_n}{m_1+m_2 \ldots m_n}$$



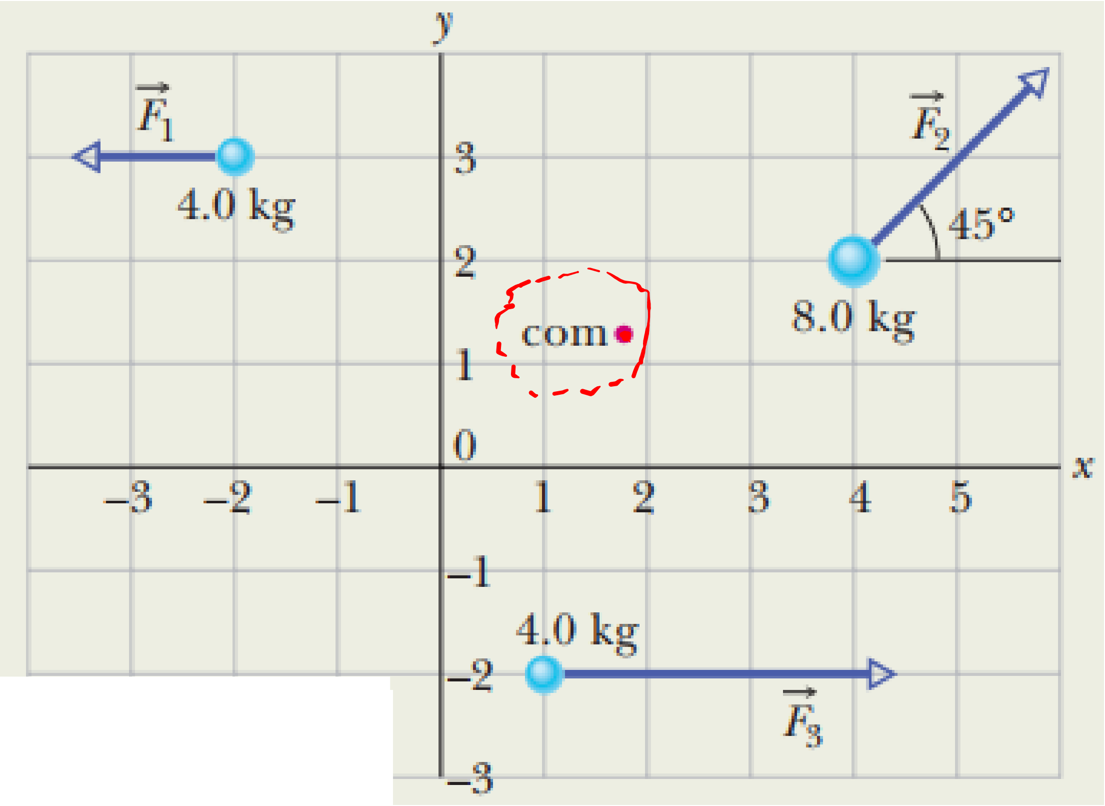
# A Segunda Lei de Newton para um Sistema de Partículas

$$\vec{F}_{res} = M.\,a_{CM}$$

$$\vec{F}_{res,x} = M.\,a_{CM,x} \quad \vec{F}_{res,y} = M.\,a_{CM,y} \quad \vec{F}_{res,z} = M.\,a_{CM,z}$$

# A Segunda Lei de Newton para um Sistema de Partículas

As três partículas da figura ao lado estão inicialmente em repouso. Cada uma sofre a ação de uma força externa produzida por corpos fora do sistema das três partículas. As orientações das forças estão indicadas e os módulos são $F_1 = 6{,}0\ N$, $F_2 = 12\ N$ e $F_3 = 14\ N$. Qual é a aceleração do centro de massa do sistema e em que direção se move?



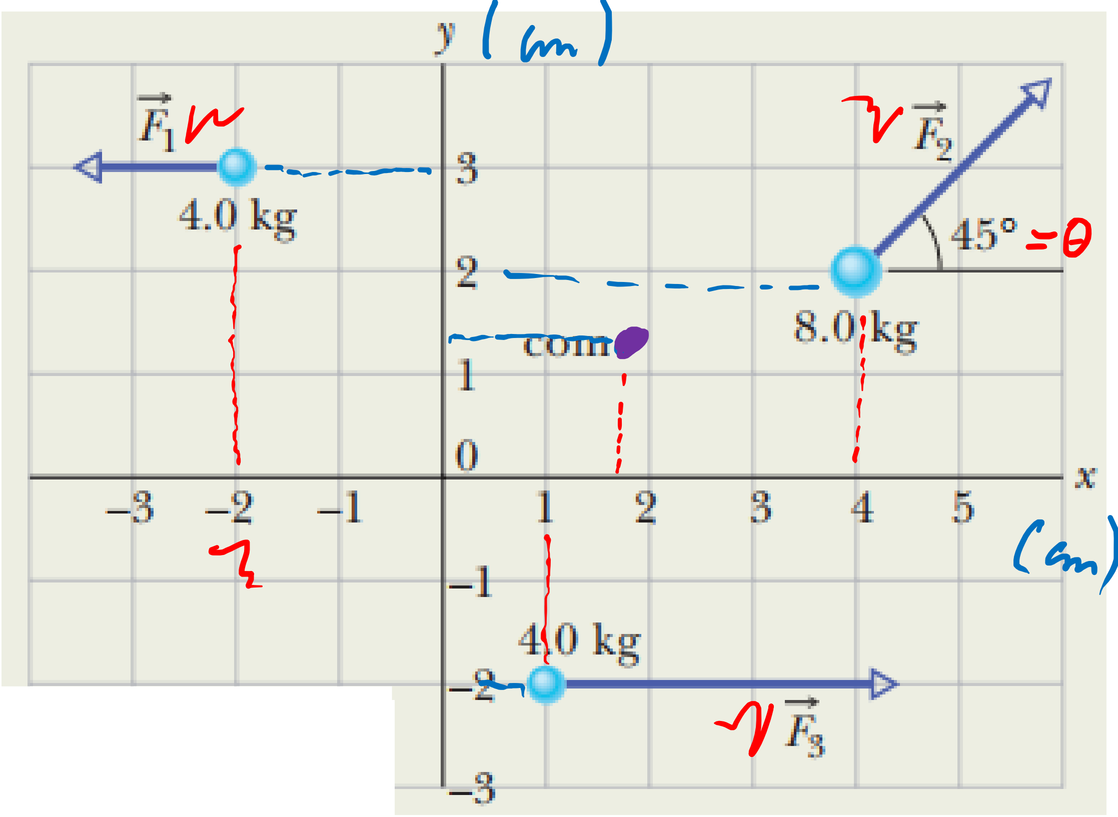
# Calc. do C.M.

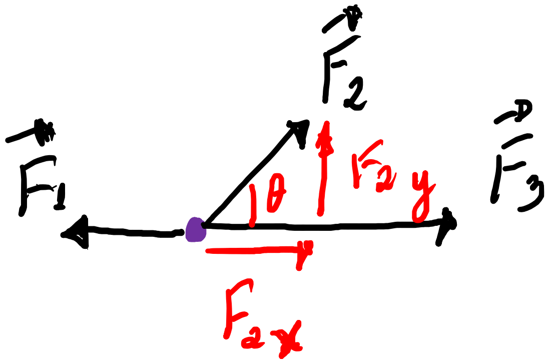
$$x_{CM} = \frac{x_1 . m_1 + x_2 . m_2 + x_3 . m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$x_{CM} = \frac{-2 . 4,0 + 4 . 8,0 + 1 . 4,0}{4,0 + 8,0 + 4,0} = 1,75 \text{ m}$$

$$y_{CM} = \frac{y_1 . m_1 + y_2 . m_2 + y_3 . m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$y_{CM} = \frac{3 . 4,0 + 2 . 8,0 + (-2) . 4,0}{4,0 + 8,0 + 4,0} = 1,25 \text{ m}$$



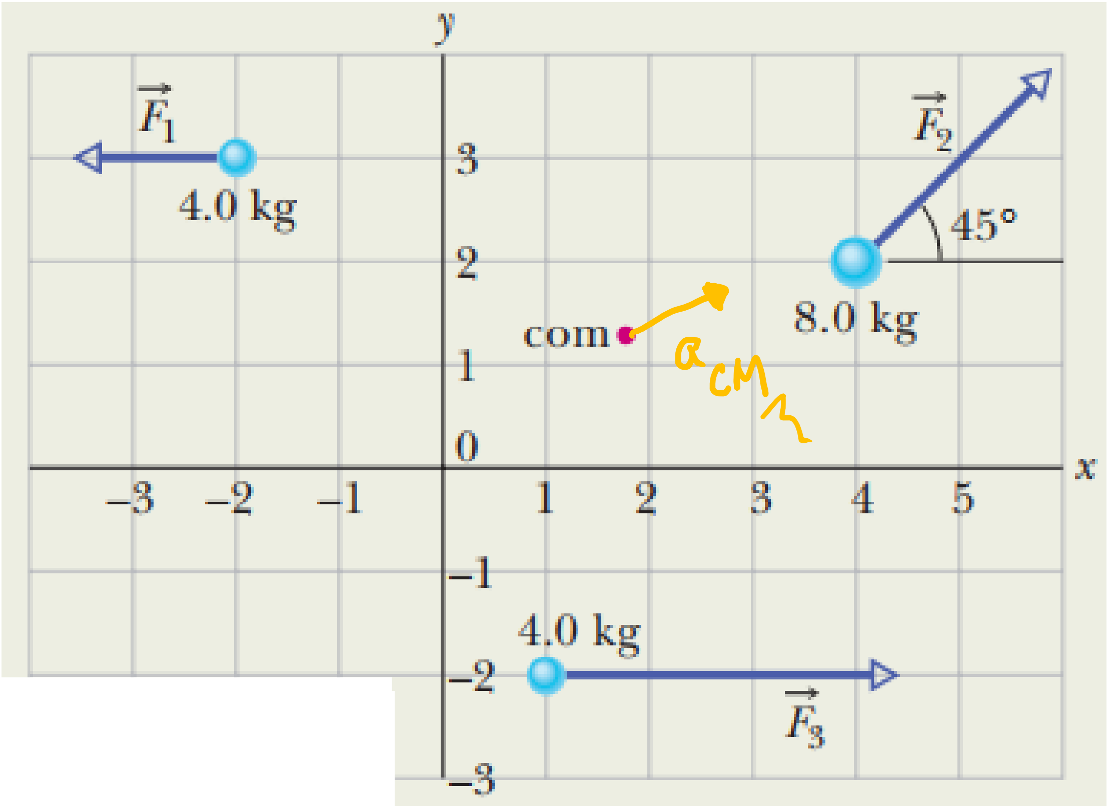




$$\begin{cases} \vec{F}_{R_x} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{2x} + \vec{F}_3 \\ \vec{F}_{R_y} = \vec{F}_{2y} \end{cases}$$

$$F_{Rx} = -6{,}0 + 12 \cdot \cos 45° + 14$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos\theta$$

$$F_{2x} = 12 \cdot \cos 45°$$




$$\vec{F}_{Rx} = M \cdot a_{cM,x}$$

$$a_{cMx} = \frac{-6{,}0 + 12 \cdot \cos 45° + 14}{4{,}0 + 8{,}0 + 4{,}0} = 1{,}03\ m/s^2$$

---

$$F_{Ry} = F_{2y} = 12 \sin 45°$$

$$a_{cmy} = \frac{F_{2y}}{M} = \frac{12 \cdot \cos 45°}{4{,}0 + 8{,}0 + 4{,}0} = 0{,}53\ m/s^2$$

$$a_{cm} = \sqrt{a_{cmx}^2 + a_{cmy}^2}$$

$$a_{cm} = \sqrt{1{,}03^2 + 0{,}53^2}$$

$$a_{cm} \cong 1{,}2\ m/s^2$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{a_{cmy}}{a_{cmx}}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{0{,}53}{1{,}03}$$

$$\theta = 27°$$

# Momento Linear

$$\vec{p} = m.\vec{v} \text{ (momento linear de uma partícula)}$$

A taxa de variação com o tempo do momento de uma partícula é igual à força resultante que atua sobre a partícula e tem a mês orientação que a força resultante.

$$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m.\vec{v}) = m\overbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}^{a} = m.\vec{a}$$

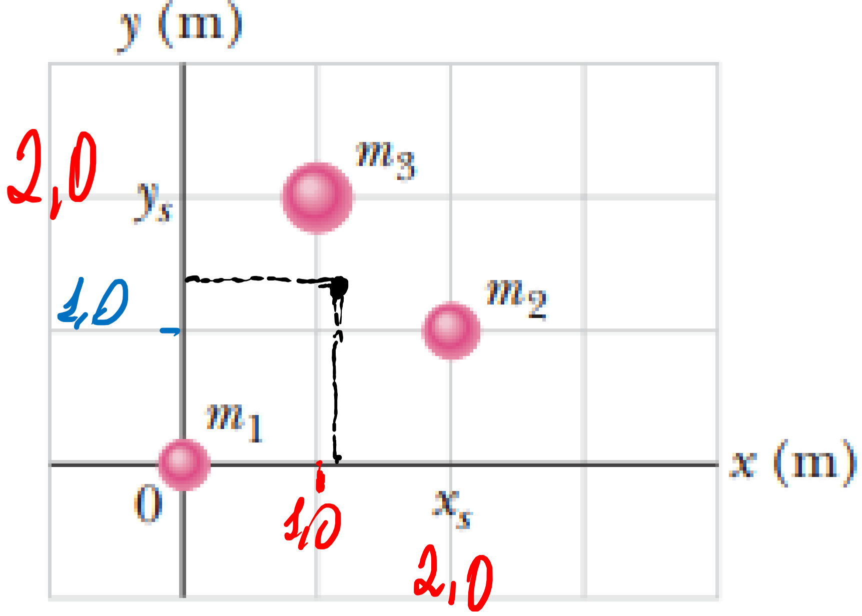
$$\begin{cases} \Delta\vec{p} = \vec{J} \rightarrow \text{impulso} \\ \vec{p} - \vec{p}_0 = \vec{J} \end{cases}$$

# Momento linear de um sistema de partículas

$$\vec{P} = M.\vec{v}_{CM} \rightarrow v_{CM_x} = \frac{v_1.m_1 + v_2.m_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}$$

O momento linear de um sistema de partículas é igual ao produto da massa total do sistema pela velocidade do centro de massa.

•2 A Fig. 9-35 mostra um sistema de três partículas de massas $m_1 = 3{,}0$ kg, $m_2 = 4{,}0$ kg e $m_3 = 8{,}0$ kg. As escalas do gráfico são definidas por $x_s = 2{,}0$ m e $y_s = 2{,}0$ m. Quais são (a) a coordenada $x$ e (b) a coordenada $y$ do centro de massa do sistema? (c) Se $m_3$ aumenta gradualmente, o centro de massa do sistema se aproxima de $m_3$, se afasta de $m_3$ ou permanece onde está?



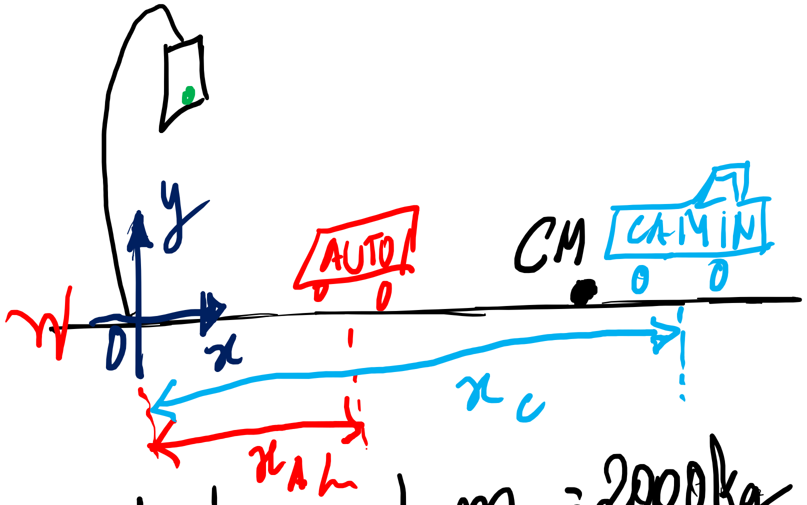

a) $$x_{cm} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$x_{cm} = \frac{3{,}0 \cdot 0 + 4{,}0 \cdot 2{,}0 + 8{,}0 \cdot 1{,}0}{3{,}0 + 4{,}0 + 8{,}0} \cong 1{,}1 \text{ m}$$

b) $$y_{cm} = \frac{3{,}0 \cdot 0 + 4{,}0 \cdot 1{,}0 + 8{,}0 \cdot 2{,}0}{3{,}0 + 4{,}0 + 8{,}0} = 1{,}\bar{3} \text{ m}$$

c) Se aproxima de $m_3$.

**•10** Um automóvel de 1000 kg está parado em um sinal de trânsito. No instante em que o sinal abre, o automóvel começa a se mover com uma aceleração constante de 4,0 m/s². No mesmo instante, um caminhão de 2000 kg, movendo-se no mesmo sentido com velocidade constante de 8,0 m/s, ultrapassa o automóvel. (a) Qual é a distância entre o CM do sistema carro-caminhão e o sinal de trânsito em $t = 3{,}0$ s? (b) Qual é a velocidade do CM nesse instante?




a) Calc. posição p/ o carro em $t = 3$ s (MUV) ↳ 3,5 s

$$x_A = x_{0A} + v_{0A} \cdot t + \frac{a_A \cdot t^2}{2}$$

$$x_A = 0 + 0 \cdot 3 + \frac{4{,}0 \cdot 3^2}{2} = 18\,m$$

M.U.V. $\begin{cases} m_A = 1000\,kg \\ a_A = 4{,}0\,m/s^2 \\ v_{0A} = 0 \end{cases}$

$m_C = 2000\,kg$

$\underbrace{v_C = 8{,}0\,m/s}_{M.U.}$

em $t = 3{,}0$ s

M.U.: $x_C = x_0 + v_C \cdot t$ — Calc. posição p/ o caminhão

$$x_C = 0 + 8{,}0 \cdot 3 = 24\,m$$

$$x_{CM} = \frac{m_A \cdot x_A + m_C \cdot x_C}{m_A + m_C} = \frac{1000 \cdot 18 + 2000 \cdot 24}{1000 + 2000}$$

$$x_{CM} = 22\,m$$

b) $$v_{CM} = \frac{m_A \cdot v_A + m_C \cdot v_C}{m_A + m_C}$$

$$v_{CM} = \frac{1000 \cdot 12 + 2000 \cdot 8{,}0}{1000 + 2000}$$

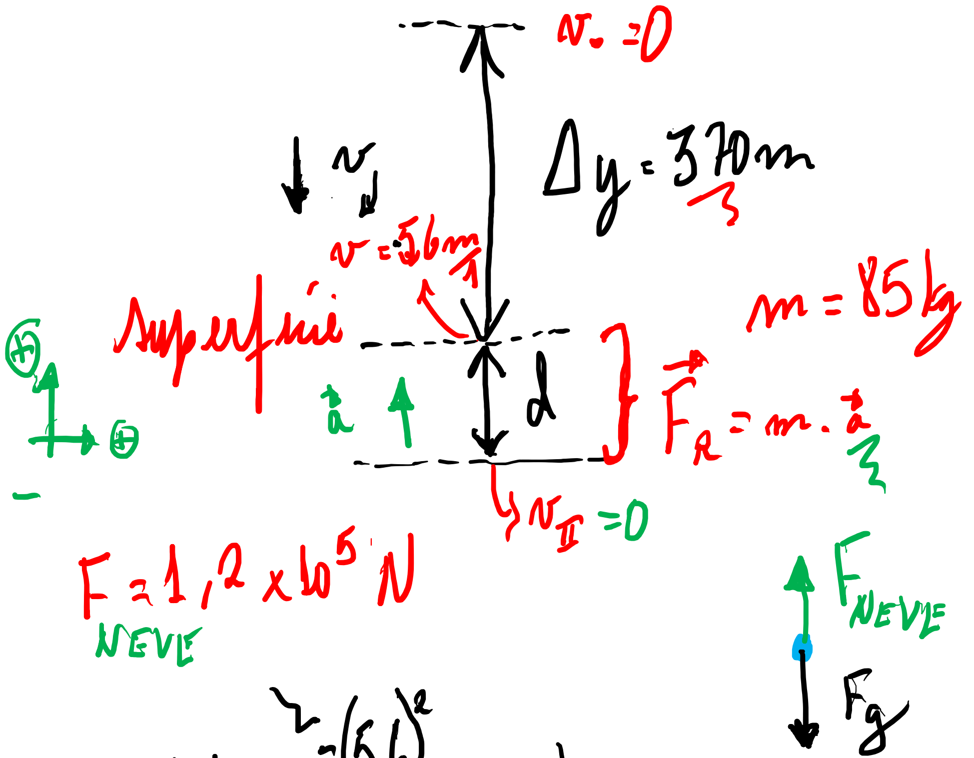
$$v_{CM} = 9{,}\bar{3}\ m/s$$

$$v_A = v_{0A} + a_A \cdot t$$

$$v_A = 0 + 4{,}0 \cdot 3{,}0$$

$$v_A = 12\ m/s$$

**•24** Em fevereiro de 1955, um paraquedista saltou de um avião, caiu 370 m sem conseguir abrir o paraquedas e aterrissou em um campo de neve, sofrendo apenas pequenas escoriações. Suponha que a velocidade do paraquedista imediatamente antes do impacto era 56 m/s (velocidade terminal), a massa (incluindo os equipamentos) era 85 kg e a força da neve sobre o seu corpo tenha atingido o valor (relativamente seguro) de $1,2 \times 10^5$ N. Determine (a) a profundidade da neve mínima para que o paraquedista aterrissasse sem ferimentos graves e (b) o módulo do impulso da neve sobre o paraquedista.




$\vec{J} = \Delta\vec{p}$

$J = \underbrace{p}_{v=0 \,\to\, 0} - p_i$

$J = -m.v_0$

$J = -(85.-56)$

$J = 4760\,kg.m/s$

$J = 4,8 \times 10^3\,kg.m/s$

a) $d = ?$

$v^2 = v_0^2 + 2.a.d$

$d = \frac{\overset{0}{v^2} - v_0^2}{2.a}$

$d = \frac{-v_0^2}{2.\left(\frac{F - m.g}{m}\right)}$

$d = \frac{-(56)^2}{2.\left(\frac{1,2\times10^5 - 85.9,8}{85}\right)}$

$d \cong 1,1\,m$

$F - F_g = m.a$

$F - m.g = m.a$

$\frac{F - m.g}{m} = a$