Introdução à Análise - Verão 2021

3^a **Prova**

Prof.: Ivan Pontual Costa e Silva

1) Considere a série de potências

$$\sum_{n\geq 0}(1-x)^n.$$

a) [1.0 pt.] Prove que essa série, vista como série de funções reais de variável real converge se $x \in (0,2)$, mas diverge se $x \notin [0,2]$.

b) [0.5 pt.] Prove que para $x \in (0,2)$, o limite é $1/x$.

c) [2.0 pts.] Use os itens anteriores para obter expansões em série de potências para as funções $\ln x$ e $1/x^2$ em $(0,2)$.

d) [1.5 pts.] Enuncie e prove os análogos de (a) e (b) para $x \in \mathbb{C}$. Você pode assumir que os análogos dos resultados provados em aula sobre raio de convergência para séries de potência reais continuam válidos para séries de potências complexas.

2) Tome $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. Uma *álgebra (sobre* $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-*álgebra* é um par[1] $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \cdot)$ onde $\mathcal{A}$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e

$$\cdot : (A,B) \in \mathcal{A} \mapsto A \cdot B \in \mathcal{A}$$

é uma operação binária em $\mathcal{A}$, chamada de *produto* (de $\mathcal{A}$), satisfazendo os seguintes axiomas, $\forall A, B, C \in \mathcal{A}$.

P1) *Associatividade*, i.e., $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

P2) *Bilinearidade*, que se divide em

- *distributividade à esquerda*, i.e. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
- *distributividade à direita*, i.e., $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
- *compatibilidade com produto por escalar*, i.e., se $a, b \in \mathbb{K}$, $(a.A) \cdot (b.B) = (a.b).(A \cdot B)$.

A álgebra $\mathcal{A}$ é dita ser *comutativa* (ou *abeliana*) se $A \cdot B = B \cdot A$ para quaisquer $A, B \in \mathcal{A}$; e *unital* se existe um elemento $1_{\mathcal{A}}$ tal que $1_{\mathcal{A}} \cdot A = A \cdot 1_{\mathcal{A}} = A$, para todo $A \in \mathcal{A}$, chamado de *identidade* na álgebra. (Uma identidade, se existe, é única.)

[1] Adotando o abuso notacional tradicional em várias áreas da matemática, omitiremos um ou mais elementos de pares, triplas, etc. sempre que não houver risco de confusão.

Um elemento A de uma álgebra unital $\mathcal{A}$ é *invertível* se existe um $B \in \mathcal{A}$ tal que

$$A \cdot B = B \cdot A = 1_{\mathcal{A}}.$$

(Se tal B existe, ele é único, e o denotamos por $B =: A^{-1}$.) Note que se A_1 e A_2 são elementos invertíveis, seu produto também é: de fato $(A_1 \cdot A_2)^{-1} = A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$ nesse caso.

Uma *álgebra normada* sobre $\mathbb{K}$ é um par $(\mathcal{A}, \| \, . \, \|)$, onde $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \cdot)$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra e $\| \, . \, \|$ é uma norma no $\mathbb{K}$-espaço vetorial subjacente satisfazendo

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \|B\|, \quad \forall A, B \in \mathcal{A}. \tag{1}$$

A álgebra normada é dita ser *unital* (ou *com unidade*) se possui identidade $1_{\mathcal{A}}$ como álgebra satisfazendo

$$\|1_{\mathcal{A}}\| = 1.$$

Uma álgebra normada é uma *álgebra de Banach* se é completa com respeito à métrica de sua norma.

Fixe uma $\mathbb{K}$-álgebra de Banach unital $(\mathcal{A}, \| \, . \, \|)$, **não necessariamente abeliana**, e faça o que se pede.

a) [1.5 pts.] Mostre que dado $A \in \mathcal{A}$ com $\|A - 1_{\mathcal{A}}\| < 1$ a *série de Neumann*

$$\sum_{n \geq 0} (1_{\mathcal{A}} - A)^n$$

converge[2] para um elemento $B \in \mathcal{A}$, e mostre que $B \equiv A^{-1}$ (compare com a questão 1). Ou seja, todo elemento na bola aberta de raio 1 centrada em $1_{\mathcal{A}}$ é invertível. (*Sugestão:* use (1) e o critério M de Weierstrass para convergência de séries em espaços de Banach visto em aula.)

b) [1.0 pt.] Prove que se $A_0 \in \mathcal{A}$ é invertível e

$$\|A - A_0\| < \frac{1}{\|A_0^{-1}\|}, \tag{2}$$

então A é invertível. Conclua que o conjunto dos elementos invertíveis em uma álgebra de Banach é aberto. (*Sugestão:* mostre primeiro que $A_0^{-1} \cdot A$ é invertível usando (a) e manipulando com (1) e (2).)

c) [1.5 pts.] Suponha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. O *conjunto resolvente* de um elemento $A \in \mathcal{A}$ é

$$\mathcal{R}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \, : \, A - \lambda.1_{\mathcal{A}} \text{ é invertível}\}.$$

Use o item anterior para provar que $\mathcal{R}(A)$ é aberto em $\mathbb{C}$, e portanto o *espectro* $\sigma(A)$ de A, definido por

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \mathcal{R}(A)$$

[2] Aqui, $A^n := A \cdot \dots \cdot A$ (n vezes).

é fechado. De fato, note que se $\|A\| < |\lambda|$, então

$$\|1_A - \frac{A}{\lambda} - 1_{\mathcal{A}}\| < 1,$$

e portanto $\lambda \in \mathcal{R}(A)$. Use isto e a propriedade de Heine-Borel de $\mathbb{C}$ para provar que $\sigma(A)$ é compacto, estando contido no "disco fechado de raio $\|A\|$" (que será um ponto se $\|A\| = 0$) em $\mathbb{C}$[3].

d) [1.0 pt.] Vimos em aula que se X é um espaço métrico compacto, o conjunto $C(X, \mathbb{C})$ das funções $f : X \to \mathbb{C}$ contínuas é uma $\mathbb{C}$-álgebra de Banach abeliana com respeito a operações ponto a ponto e norma do sup $\| \,.\, \|_\infty$. Mostre que o espectro de uma $f \in C(X, \mathbb{C})$ coincide com sua imagem.

"*The art of doing mathematics consists in finding that special case which contains all the germs of generality.*"

D. Hilbert (1862-1943), matemático alemão.

[3] O $\mathbb{C}$-espaço vetorial $M_n(\mathbb{C})$ das matrizes $n \times n$ com entradas complexas munido do produto usual de matrizes é uma $\mathbb{C}$-álgebra, e com respeito à norma dada por

$$\|[a_{ij}]\| := max_{i,j=1,\ldots,n}\{|a_{ij}|\}$$

é uma álgebra de Banach. Aqueles familiares com álgebra linear notarão que para uma matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$, seu espectro coincide com seu conjunto de autovalores.