Lista II

Técnicas de Integração

(1) $\int_0^1 (x^3+3)^2 \cdot 3x^2\,dx$

Fazendo $u(x) = x^3+3$, temos:

$u'(x) = 3x^2$; $u(0) = 3$; $u(1) = 4$.

Logo,

$$\int_3^4 u^2\,du = \left.\frac{u^3}{3}\right|_3^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{3^3}{3}$$

$$= \frac{64}{3} - \frac{27}{3} = \frac{37}{3} \ //$$

Observação: Podemos calcular esta integral sem mudar explicitamente a variável:

$$\int_0^1 \underbrace{(x^3+3)}_{u}^2 \cdot \underbrace{3x^2\,dx}_{du} = \left.\frac{(x^3+3)^3}{3}\right|_0^1$$

$$= \frac{4^3}{3} - \frac{3^3}{3} = \frac{37}{3}$$

② $\int (x^4+5)^2 \cdot x^3 dx$

Fazendo $u(x) = x^4+5$, temos $du = 4x^3 dx$.
Porém, observamos que a constante 4 não aparece na integral proposta. Usando a propriedade 2 das integrais indefinidas, temos:

$$\int (x^4+5)^2 \cdot x^3 dx = \frac{4}{4} \int (x^4+5)^2 \cdot x^3 dx$$

$$= \frac{1}{4} \int (x^4+5)^2 \cdot 4x^3 dx$$

$$= \frac{1}{4} \int u^2 \cdot du = \frac{1}{4} \cdot \frac{u^3}{3} + C$$

$$= \frac{u^3}{12} + C = \frac{(x^4+5)^3}{12} + C$$

Podemos adotar um procedimento um pouco diferente. De $du = 4x^3 dx$ obtemos $\frac{du}{4} = x^3 dx$, e escrevemos:

$$\int (x^4+5)^2 \cdot x^3 dx = \int u^2 \cdot \frac{du}{4} = \frac{1}{4} \int u^2 du,$$

③ $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$

Fazendo $u = x+1$, temos

$du = dx$; $u(0) = 1$; $u(1) = 2$

Logo,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \int_1^2 \frac{du}{u}$$

$$= \ln u \Big|_1^2 = \ln 2 - \cancel{\ln 1}^{\,0}$$

$$= \ln 2$$

④ $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$

Fazendo $u = 1+x^2$, $du = 2x\,dx \Rightarrow \frac{du}{2} = x\,dx$

Logo,

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{2}\ln u + c = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

(5) $\int_0^2 3^{x^2} x\,dx$

Lembrando que $(a^x)' = a^x \ln a$ e fazendo $u = x^2$, temos:

$du = 2x\,dx \Rightarrow \frac{du}{2} = x\,dx$; $u(0) = 0$; $u(2) = 4$

e escrevemos:

$$\int_0^2 3^{x^2} \cdot x\,dx = \int_0^4 3^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int 3^u\,du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3^u}{\ln 3}\Big|_0^4 = \frac{1}{2\ln 3}(3^4 - 3^0)$$

$$= \frac{1}{2\ln 3}(81 - 1) = \frac{80}{2\ln 3} = \frac{40}{\ln 3}$$

(6) $\int (x^2+5)^3 \cdot 2x\,dx$

Fazendo $u = x^2 + 5$, temos $du = 2x\,dx$

$$\int (x^2+5)^3 \cdot 2x\,dx = \int u^3\,du$$

$$= \frac{u^4}{4} + C = \frac{(x^2+5)^4}{4} + C$$

(7) $\displaystyle\int_0^1 (x^2+5)^3 \cdot 2x\,dx$

Fazendo $u = x^2+5$, $du = 2x\,dx$

$u(0) = 5$; $u(1) = 6$

Pelo exercício anterior e pelo T.F.C, temos:

$$\int_5^6 u^3\,du = \frac{u^4}{4}\Big|_5^6$$

$$= \frac{6^4}{4} - \frac{5^4}{4} = \frac{1296}{4} - \frac{625}{4} = \frac{671}{4} \quad //$$

(8) $\displaystyle\int \frac{3x^2\,dx}{1+x^3}$

Fazendo $u = 1+x^3$, $du = 3x^2\,dx$. Logo,

$$\int \frac{3x^2\,dx}{1+x^3} = \int \frac{du}{u}$$

$$= \ln|u| + C = \ln|1+x^3| + C$$

(9) $\int \frac{dx}{16+9x^2}$

Na integral dada temos:

$$\int \frac{dx}{16+9x^2} = \int \frac{dx}{4^2+3^2x^2} = \int \frac{dx}{4^2+(3x)^2}$$

Para usarmos a tabela de integrais imediatas, fazemos: $a=4$ e $u=3x$. Assim,

$$du = 3\,dx \Rightarrow \frac{du}{3} = dx$$

Agora temos

$$\int \frac{dx}{16+9x^2} = \int \frac{dx}{4^2+(3x)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{4^2+u^2}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{u}{4} + C\right)$$

$$= \frac{1}{12}\operatorname{arctg}\frac{u}{4} + C$$

Como $u=3x$, temos

$$= \frac{1}{12}\operatorname{arctg}\frac{3x}{4} + C$$

(10) $\int x e^x dx$

Fazendo $u = x$ e $dv = e^x dx$, temos
$du = dx$ e $v = e^x$

Logo,

$$\int x.e^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

$$= xe^x - e^x + C$$

(11) $\int x^2 e^x dx$

Fazendo $u = x^2$ e $dv = e^x dx$, temos:
$du = 2x dx$ e $v = e^x$

Logo,

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int e^x 2x \, dx$$

$$= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

Chegamos numa integral que contém a integral do exemplo anterior. Então:

$$= x^2 e^x - 2.(xe^x - e^x) + C$$

$$= e^x (x^2 - 2x + 2) + C$$

(12) $\int_1^e \ln x \, dx$

Fazendo $u = \ln x$ e $dv = dx$, temos:

$du = \frac{1}{x} dx$ e $v = x$

Logo,

$$\int_1^e \ln x \, dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} dx$$

$$= x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = x \ln x \Big|_1^e - x \Big|_1^e$$

$$= (e \cdot \ln e - 1 \cdot \ln 1) - (e - 1)$$

$$= (e - 0) - e + 1 = e - e + 1 = 1 //$$

(13) $\int x^2 \ln x \, dx$

Fazendo $u = \ln x$ e $dv = x^2 dx$

$du = \frac{dx}{x}$ e $v = \frac{x^3}{3}$. Logo:

$$\int x^2 \ln x \, dx = \ln x \cdot \left(\frac{x^3}{3}\right) - \int \frac{x^{\cancel{3}}}{3} \cdot \frac{dx}{\cancel{x}}$$

$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C$$

$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

(14) $\int e^x \cdot \cos x \, dx$

Fazendo $u = e^x$ e $dv = \cos x \, dx$, então
$du = e^x dx$ e $v = \operatorname{sen} x$

Logo,

$$\int e^x \cdot \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \cdot e^x dx$$

Para calcular $\int \operatorname{sen} x \cdot e^x dx$, usamos novamente a integração por partes

$u = e^x$ e $dv = \operatorname{sen} x \, dv$
$du = e^x dx$ e $v = -\cos x$. Logo,

$$\int e^x \cdot \operatorname{sen} x \, dx = e^x \cdot (-\cos x) - \int -\cos x \cdot e^x dx$$
$$= -e^x \cos x + \int \cos x \cdot e^x dx$$

Portanto,

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cdot \operatorname{sen} x - \left(-e^x \cdot \cos x + \int e^x \cos x \, dx\right)$$
$$= e^x \operatorname{sen} x + e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \cos x \, dx$$

Para simplificar a notação podemos escrever:

$$I = \int e^x \cdot \cos x \, dx$$

O que fornece

$$I = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - I$$ ou

$$2I = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x$$ ou

$$2I = e^x (\operatorname{sen} x + \cos x)$$ ou ainda

$$I = \frac{e^x}{2} (\operatorname{sen} x + \cos x)$$

Finalmente temos

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x}{2} (\operatorname{sen} x + \cos x) + C$$