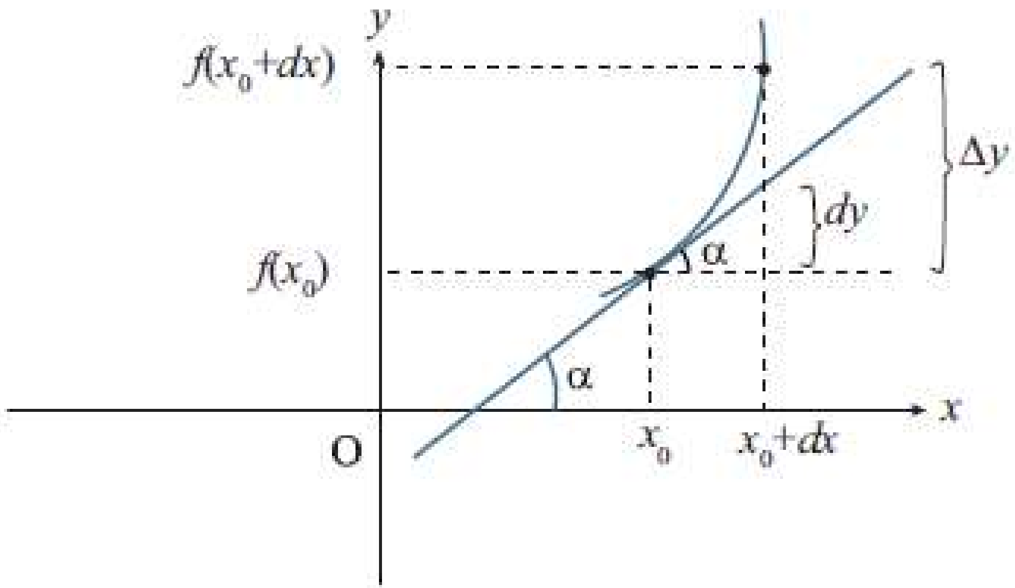
Diferencial

Seja $f(x)$ uma função contínua e derivável em $x_0 \in I$. Da interpretação geométrica da derivada, sabemos que $f'(x_0)$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f, no ponto $(x_0, f(x_0))$. Veja a figura:



Diferencial

Seja dx um acréscimo a x_0 e defina $dy = \operatorname{tg} \alpha \cdot dx$. Como $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$, então

$$dy = f'(x_0)dx\,. \tag{4.24}$$

O número dy é chamado de diferencial da função $y = f(x)$, no ponto $x = x_0$.

Vamos denotar por Δy o acréscimo sofrido por f quando se dá um acréscimo dx a x_0, ou seja,

$$\Delta y = f(x_0 + dx) - f(x_0)\,. \tag{4.25}$$

Diferencial

Se o acréscimo dx for suficientemente pequeno, podemos esperar que a diferença $\Delta y - dy$ é também pequena e podemos aproximar Δy pela diferencial dy, sendo $dy = f'(x_0)\,dx$, ou seja

$$f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx\,. \tag{4.26}$$

Para entendermos melhor esse resultado, chame $x_0 + dx$ de x na equação (4.26). Em seguida, faça $dx = x - x_0$. Obtemos que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,. \tag{4.27}$$

A equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ onde (x, y) são as coordenadas de um ponto da reta. Comparando com a expressão (4.27) segue que o gráfico da função $f(x)$, para x próximo de x_0, pode ser aproximado por uma linha reta (ou uma função afim).

Exemplo

Calcule um valor aproximado para $\sqrt[3]{65{,}5}$ usando diferenciais.

Seja $y = f(x)$ a função definida por $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Escrevemos:

$$y + \Delta y = \sqrt[3]{x + \Delta x} \text{ e } dy = \frac{1}{3x^{2/3}}\,dx.$$

Fazemos $x = 64$ e $\Delta x = 1{,}5$, isto porque 64 é o cubo perfeito mais próximo de 65,5.

Portanto,

$x + \Delta x = 65{,}5$, $dx = \Delta x = 1{,}5$ e

$$dy = \frac{1}{3(64)^{2/3}} \cdot 1{,}5 = \frac{1{,}5}{3 \cdot 16} = 0{,}03125.$$

Então,

$$\sqrt[3]{65{,}5} = \sqrt[3]{64 + 1{,}5} = \sqrt[3]{x + \Delta x} = y + \Delta y.$$

Fazendo $\Delta y \cong dy$, obtemos finalmente que:

$$\sqrt[3]{65{,}5} \cong y + \Delta y = 4 + 0{,}03125$$

$$= 4{,}03125.$$