Aplicações da Derivada

Concavidade e Pontos de Inflexão. Esboço de Gráficos de Funções. Problemas de Maximização e Minimização. Fórmula de Taylor.

Concavidade e Pontos de Inflexão

Definição 5.5. Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo I e derivável em $x_0 \in I$. Diz-se que o gráfico da $f(x)$ tem concavidade positiva (negativa) em x_0 quando existe uma vizinhança V deste ponto, isto é, um intervalo aberto contido no intervalo I e que contém x_0, tal que para todo $x \in V$ o gráfico da função está acima (abaixo) da reta tangente ao ponto da curva com abcissa x_0.

Concavidade e Pontos de Inflexão

Teorema 5.7. Seja f uma função derivável até segunda ordem no intervalo I e suponha que em $x_0 \in I$, $f''(x_0) \neq 0$. Nesse caso,

i) se $f''(x_0) > 0$, o gráfico da f tem concavidade positiva em x_0;

ii) se $f''(x_0) < 0$, o gráfico da f tem concavidade negativa em x_0.

Definição 5.6. Um ponto do domínio de uma função f, no qual f é contínua, é chamado de ponto de inflexão quando neste ponto a função muda de concavidade.

Exemplo

5.8.5 Exemplos Determinar os pontos de inflexão e reconhecer os intervalos onde as funções seguintes tem concavidade voltada para cima ou para baixo.

(i) $f(x) = (x - 1)^3$.

Temos:

$$f'(x) = 3(x - 1)^2$$

e $$f''(x) = 6(x - 1).$$

Fazendo $f''(x) > 0$, temos as seguintes desigualdades equivalentes:

$$6(x - 1) > 0$$

$$x - 1 > 0$$

$$x > 1.$$

Exemplo

Portanto, no intervalo $(1, +\infty)$, $f''(x) > 0$. Analogamente, no intervalo $(-\infty, 1)$, $f''(x) < 0$. Pela proposição 5.8.3 f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, 1)$ e no intervalo $(1, +\infty)$ f é côncava para cima.

No ponto $c = 1$ a concavidade muda de sentido. Logo, neste ponto, o gráfico de f tem um ponto de inflexão.

Podemos ver o gráfico de f na Figura 5.25.

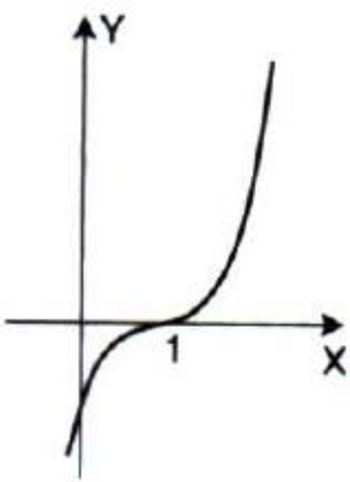


Figura 5.25

Tarefa 8

Resolver os seguintes exercícios, digitalizar e enviar no moodle grupos.

9. Analisar a concavidade das funções:

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1, x \in \mathbb{R};$

Esboço de Gráficos de Funções

Os critérios anteriores para determinar-se os extremos de uma função, onde ela cresce ou decresce, a concavidade e os pontos de inflexão constituem ferramentas importantes que auxiliam no esboço do gráfico da função, como veremos a seguir.

Esboço de Gráficos de Funções

Abaixo temos um resumo que pode ser seguido para analisar o comportamento de uma função e, a partir disso, construir um esboço do gráfico destacando suas propriedades e características.

Etapas	Procedimento
1ª	Encontrar $D(f)$.
2ª	Calcular os pontos de intersecção com os eixos. (Quando não requer muito cálculo.)
3ª	Encontrar os pontos críticos.
4ª	Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x)$.
5ª	Encontrar os máximos e mínimos relativos.
6ª	Determinar a concavidade e os pontos de inflexão de f.
7ª	Encontrar as assíntotas horizontais e verticais, se existirem.
8ª	Esboçar o gráfico.

Exemplo

5.9.2 Exemplos Esboçar o gráfico das funções:

(i) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2.$

Seguindo as etapas propostas, temos:

1ª etapa. $D(f) = \mathbb{R}.$

2ª etapa. Intersecção com o eixo dos y.

$$f(0) = 2.$$

3ª etapa. $f'(x) = 12x^3 + 24x^2 + 12x.$

Resolvendo $12x^3 + 24x^2 + 12x = 0$, encontramos $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$, que são os pontos críticos.

4ª etapa. Fazendo $f'(x) > 0$, obtemos que $12x^3 - 24x^2 + 12x > 0$ quando $x > 0$. Portanto, f é crescente para $x \geq 0$.

Fazendo $f'(x) < 0$, obtemos que $12x^3 - 24x^2 + 12x < 0$ quando $x < 0$. Portanto, f é decrescente para $x \leq 0$.

Exemplo

5ª etapa. Temos $f''(x) = 36x^2 - 48x + 12$.

Como $f''(0) = 12 > 0$, temos que o ponto 0 é um ponto mínimo e $f(0) = 2$ é um mínimo relativo de f.

Como $f''(1) = 0$, nada podemos afirmar.

6ª etapa. Fazendo $f''(1) > 0$, temos que $36x^2 - 48x + 12 > 0$ quando $x \in [(-\infty, 1/3) \cup (1, +\infty)]$.

Então, f é côncava para cima em $(-\infty, 1/3) \cup (1, +\infty)$.

Fazendo $f''(x) < 0$, temos que $36x^2 - 48x + 12 < 0$ para $x \in (1/3, 1)$. Então f é côncava para baixo em $(1/3, 1)$.

Os pontos de abscissa 1/3 e 1 são pontos de inflexão.

7ª etapa. Não existem assíntotas.

8ª etapa. Temos na Figura 5.28 o esboço do gráfico.

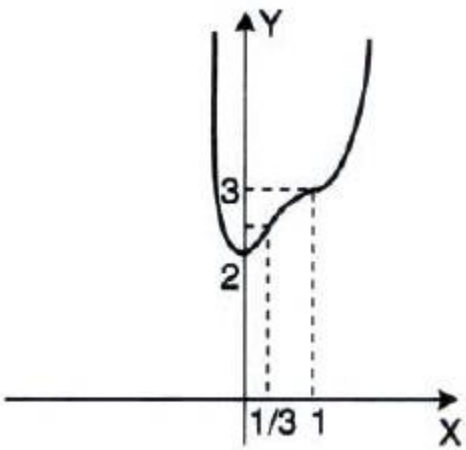


Figura 5.28

Tarefa 9

Resolver os seguintes exercícios, digitalizar e enviar no moodle grupos.

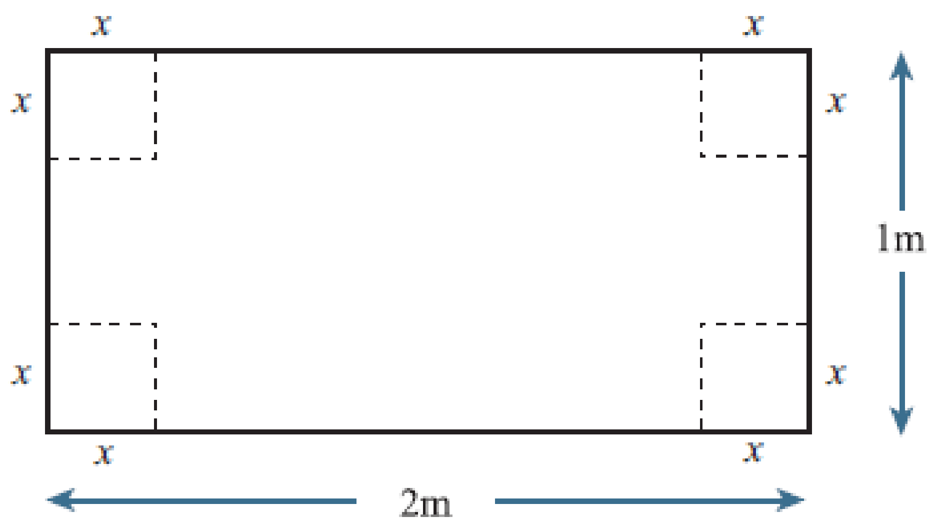
12. Esboce o gráfico da função $f(x) = x(x+2)^2, x \in \mathbb{R}$.

Problemas de Maximização e Minimização

O cálculo da derivada tem aplicação concreta em problemas onde precisa-se determinar quando uma determinada função tem seu valor máximo ou mínimo. Esta função pode descrever o volume de uma caixa, a velocidade de um móvel, etc.

Exemplo

Exemplo 21. Pretende-se fazer uma caixa de papelão a partir de uma lâmina retangular de 1 metro de largura e 2 metros de comprimento, recortando-se quadrados iguais em cada canto da lâmina para obter os lados da caixa, como mostra a figura. Qual o comprimento dos lados dos quadrados para que o volume da caixa seja máximo?



Exemplo

Resolução: Seja x o comprimento do lado dos quadrados a serem recortados. Após o recorte dos mesmos, a lâmina permite fabricar uma caixa de altura x, largura $1-2x$ e comprimento $2-2x$. Portanto, o volume como uma função de x é $V(x) = x(1-2x)(2-2x) = 2x - 6x^2 + 4x^3$, onde $x \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right]$.

Temos que $V'(x) = 2 - 12x + 12x^2 = 0$, com $x = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \notin \left[0,\ \frac{1}{2}\right]$,

$x = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ e $V''(x) = -12 + 24x$.

Como $V''\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) < 0$, segue que o volume é máximo quando

$x = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ metros.

Fórmula de Taylor

Seja $f : I \to R$ uma função n vezes derivável e $x_0 \in I$. O polinômio

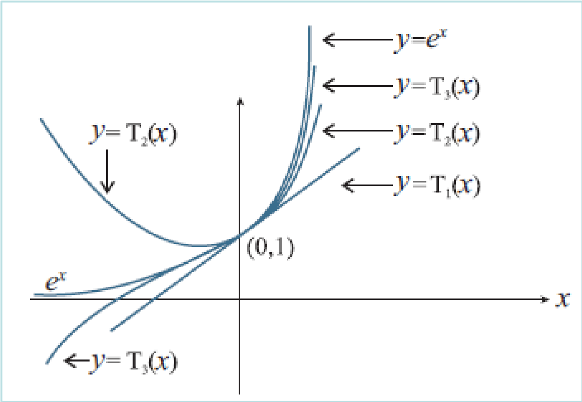
$$T_n(x; x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (5.10)$$

é chamado de polinômio de Taylor, de grau n, de f no ponto x_0.

É interessante analisarmos, agora, a diferença

$$R_n(x;\ x_0) = f(x) - T_n(x;\ x_0) \quad (5.11)$$

para termos uma idéia de como os polinômios de Taylor aproximam a função $f(x) = e^x$. A diferença R_n é chamada de erro da aproximação.



Comparando os gráficos percebe-se que para um valor de x fixado, por exemplo, $x = 2$, $R_1 > R_2 > R_3$, o erro diminui quando o grau do polinômio aumenta. Por outro lado, quando o valor de x é tomado cada vez mais próximo de $x_0 = 0$, o erro também diminui, qualquer que seja o grau do polinômio.

Fórmula de Taylor

Teorema 5.9. Seja $f: I \to \mathbb{R}$, uma função $n+1$ vezes derivável com derivadas contínuas em I e sejam $x, x_0 \in I$. Existe um número c no intervalo de extremos x_0 e x tal que

$$f(x) = T_n(x;\ x_0) + R_n(x,\ x_0) \tag{5.12}$$

onde

$$R_n(x,\ x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{5.13}$$

Além disso, se $\left|f^{(n+1)}(c)\right| \leq K$, $K > 0$, então

$$\left|R_n\right| \leq \frac{K}{(n+1)!}\left|x - x_0\right|^{n+1} \tag{5.14}$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ segue que, fixado um ponto x, o erro tende a zero quando o grau n é tomado cada vez maior.

Este teorema permite tirar conclusões bem gerais sobre o erro *$R_n(x;\ x_0)$*, que se comete quando uma função *f* é aproximada por *$T_n(x;\ x_0)$* para quaisquer *n* e *x_0*.

Tarefa 10

Resolver os seguintes exercícios, digitalizar e enviar no moodle grupos.

14. Calcule o polinômio de Taylor $T_n(x;0)$ de grau n=1, 2, 3 da função $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$, no ponto $x_0 = 0$.