Aplicações da Derivada

Teoremas de Rolle e do Valor Médio,
Máximos e Mínimos de uma Função, Funções Crescentes e Decrescentes, Critérios para Determinar Extremos de uma Função

Teorema de Rolle

Teorema 5.2. (Teorema de Rolle). Seja $f:[a,\ b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua. Supondo que f é derivável em (a,b) e $f(a)=f(b)$, existe pelo menos um $x_0\in(a,\ b)$ onde $f'(x_0)=0$.

O teorema de Rolle garante a existência de pelo menos um $x_0\in(a,\ b)$ onde $f'(x_0)=0$. Mas pode haver mais de um ponto no intervalo com esta propriedade.

O teorema de Rolle tem uma interpretação geométrica simples que é a seguinte. Lembre-se que a derivada de uma função num ponto x_0 é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto $(x_0, f(x_0))$. Se $f'(x_0)=0$, isso significa que a reta tangente no ponto $(x_0, f(x_0))$ é paralela ao eixo x.

Exemplo

9) Verifique se as hipóteses do Teorema de Rolle estão satisfeitas e, neste caso, encontre o(s) ponto(s) que satisfaz(em) a tese.

$$f:\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]\to\mathbb{R};\quad f(x)=x^4-2x^2.$$

Resolução. f é contínua em $\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]$ por ser polinômio; f é derivável em $\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)$ também por ser polinômio; $f\left(\frac{-1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$ por ser f uma função par. Logo, existe $c\in\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)$ tal que $f'(c)=0$.

$f'(x)=4x^3-x^2=0 \Leftrightarrow x=0 \quad \text{ou} \quad x=1 \quad \text{ou} \quad x=-1.$

Os pontos 1 e -1 não pertencem ao intervalo $\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Resposta. $c=0$ satisfaz a tese.

Teorema do Valor Médio

Teorema 5.3 (Teorema do Valor Médio). Seja $f:[a,\ b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua. Supondo que f é derivável em $(a,\ b)$, existe $x_0\in(a,\ b)$ onde

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad (5.7)$$

Teorema do Valor Médio

Observações

- Quando $f(a) = f(b)$, o teorema do valor médio implica $f'(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in (a, b)$, que é o resultado do teorema de Rolle.

- O teorema do valor médio tem uma interpretação física que é a seguinte:

  Se $f(t)$ descreve a posição de um móvel no intervalo de tempo $[a, b]$, então em algum instante $t_0 \in (a, b)$, a velocidade instantânea do móvel em $t = t_0$ é igual à velocidade média do móvel no intervalo $[a, b]$. Isso significa que, se um carro viaja à velocidade média de 60 km/h, então, pelo menos em um momento durante a viagem, a velocidade (instantânea) do carro foi precisamente 60 km/h.

Teorema do Valor Médio

- Geometricamente, o teorema afirma que existe pelo menos uma coordenada $x_0 \in (a, b)$ tal que a reta tangente ao gráfico da função no ponto $(x_0, f(x_0))$ é paralela à reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, como indica a figura a seguir:

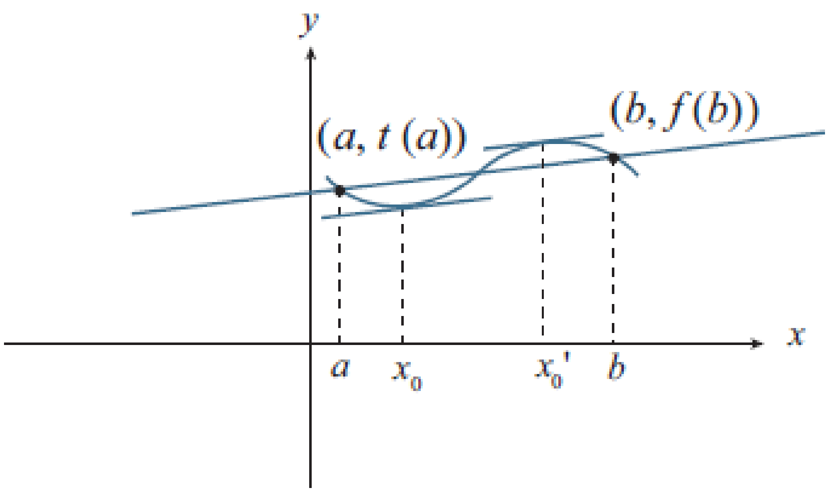


Figura 5.1

Exemplo

10) Verifique se f satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio e, em caso afirmativo, encontre um ponto c tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$:

$$f : [-6,10] \to \mathbb{R};\ f(x) = \sqrt{100 - x^2}\ .$$

Resolução. Por teoremas já vistos, segue que f é contínua em $[-6,10]$ e derivável em $(-6,10)$. Logo, existe $c \in (-6,10)$ tal que

$f'(c) = \dfrac{f(10) - f(-6)}{10 + 6} = -\dfrac{1}{2}$. Mas, $f'(c) = \dfrac{-c}{\sqrt{100 - c^2}}$. Então,

$$\frac{-c}{\sqrt{100 - c^2}} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2c = \sqrt{100 - c^2} \Leftrightarrow 4c^2 = 100 - c^2 \Leftrightarrow c^2 = 20 \Leftrightarrow c = \pm 2\sqrt{5}$$

A igualdade $2c = \sqrt{100 - c^2}$ revela que c não é negativo. Logo, $c = 2\sqrt{5}$.

Tarefa 4

Resolver os seguintes exercícios, digitalizar e enviar no moodle grupos.

14. O polinômio $f(x) = x^3 - 4x$ é uma função contínua e derivável para todo $x \in \mathbb{R}$, e $f(2) = f(-2) = 0$. Encontre $x_0 \in (-2,2)$ onde $f'(x_0) = 0$.

Máximos e Mínimos de uma Função

Definição 5.2 Dada a função $f : I \to \mathbb{R}$, um ponto $x_0 \in I$ é chamado de:

i) ponto de máximo absoluto da função quando

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{para todo} \quad x \in I; \tag{5.5}$$

ii) ponto se mínimo absoluto da função quando

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{para todo} \quad x \in I; \tag{5.6}$$

iii) ponto de máximo local (ou relativo) quando (5.5) é satisfeita em algum subintervalo aberto de I contendo x_0.

iv) ponto de mínimo local (ou relativo) quando (5.6) é satisfeita em algum subintervalo aberto de I contendo x_0.

Máximos e Mínimos de uma Função

O valor $f(x_0)$ é chamado de máximo ou mínimo, absoluto ou local, conforme o caso. Observe que um ponto de máximo ou mínimo absoluto também é um ponto de máximo ou mínimo local. O contrário não é necessariamente verdadeiro. Os máximos e mínimos de uma função são também chamados de extremos.
A derivada de uma função nos seus pontos de máximo ou mínimo tem uma propriedade, dada a seguir, que auxilia na determinação desses pontos.

Máximos e Mínimos de uma Função

Teorema 5.1. Seja f uma função derivável em x_0. Se f tem um máximo ou mínimo local em x_0, então $f'(x_0) = 0$.

Observações

- O teorema afirma que, se a função f é derivável em um ponto onde há um máximo ou mínimo da função, então neste ponto $f' = 0$. Esta é uma condição necessária, mas não suficiente para ocorrência de máximo ou mínimo no ponto. Veremos a seguir exemplo de uma função cuja derivada se anula num ponto onde não há um máximo nem um mínimo.
- Outro caso possível de ocorrer é aquele onde uma função não é derivável num dado ponto. No entanto, nesse ponto há um máximo ou mínimo. Veremos um exemplo disso a seguir.

Exemplo

1) $f(x) = 5 - x^2$.

Note que $f(x) \le 5$ para todo x real e que $f(x) = 5$ se, e somente se, $x = 0$. Podemos escrever: $f(0) \ge f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Portanto, f atinge o seu valor máximo, que é 5, no ponto 0. Assim, o ponto de máximo absoluto de f é 0 e o valor máximo absoluto é 5. E o valor mínimo absoluto de f? Note que $f(x)$ assume valores negativos arbitrariamente grandes em módulo, desde que x seja suficientemente grande em módulo. Mais precisamente, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Logo, f não assume valor mínimo absoluto.

Exemplo

2) $g(x) = (x-3)^2 + 14$.

Como $g(x) \geq 14$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $g(x) = 14$ se, e somente se, $x = 3$, concluímos que g possui um *ponto* de mínimo absoluto que é 3 e o seu *valor* mínimo absoluto é 14. Como $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, concluímos que g não assume valor máximo absoluto.

Exemplo

3) $h(x) = \operatorname{sen} x.$

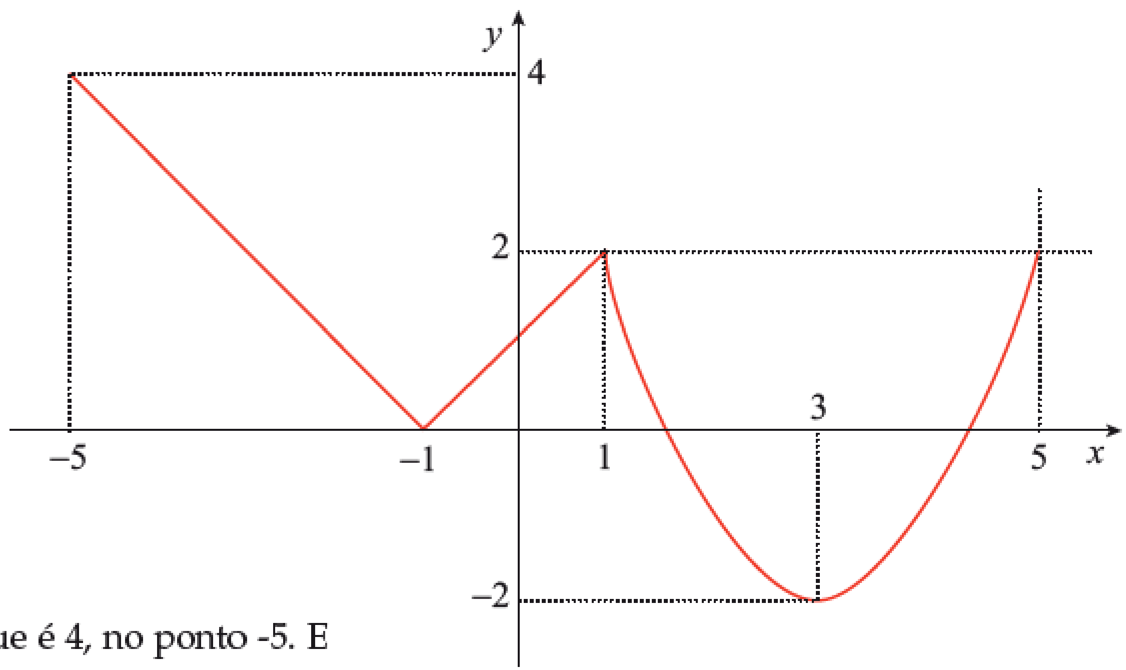
Observando seu gráfico, concluímos:

a) h tem uma infinidade de pontos de máximo absoluto, todos da forma $2k\pi + \frac{\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$. Seu valor máximo absoluto é 1.

b) h tem uma infinidade de pontos de mínimo absoluto, todos da forma $2k\pi - \frac{\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$. Seu valor mínimo absoluto é -1.

Exemplo

4) $f:[-5,5) \to \mathbb{R}$; $f(x) = \begin{cases} |x+1| & \text{se } -5 \le x < 1 \\ x^2 - 6x + 7 & \text{se } 1 \le x < 5 \end{cases}$



Observando o gráfico, podemos concluir que:

a) f assume seu valor máximo absoluto, que é 4, no ponto -5. E assume o seu valor mínimo absoluto, que é -2, no ponto 3.

b) f possui ainda um ponto de máximo relativo que é 1 e um ponto de mínimo relativo que é -1.

Máximos e Mínimos de uma Função

Definição 5.3. Dada a função $f(x)$, um ponto $x_0 \in Dom(f)$ é chamado de ponto crítico da função quando:

i) f não é derivável em x_0; ou

ii) f é derivável em x_0 e $f'(x_0) = 0$.

Exemplo

7) Determine os pontos críticos das funções:

a) $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 156$

Resolução. $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x$, que existe para todo $x \in \mathbb{R}$.

Vamos resolver a equação $f'(x) = 0$:

$$x(4x^2 - 3x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{3 \pm \sqrt{105}}{8}.$$

Resposta. Os pontos críticos de f são: 0, $\frac{3-\sqrt{105}}{8}$ e $\frac{3+\sqrt{105}}{8}$.

Exemplo

b) $g(x) = \sqrt[3]{x} - x$.

Resolução. $g'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 1$. Note que $g'(x)$ não existe para $x = 0$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = 3\sqrt[3]{x^2} \Leftrightarrow 1 = 27x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{27}}$, ou seja, $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

Resposta. Os pontos críticos de g são: 0, $-\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ e $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

Tarefa 5

Resolver os seguintes exercícios, digitalizar e enviar no moodle grupos.

1. Verifique se a função $f(x) = x^2, x \in (-1, 1)$ tem mínimo ou máximo e em qual ponto.
4. Quais os pontos críticos da função $f(x) = x^3 - 3x^2, x \in \mathbb{R}$?

Funções Crescentes e Decrescentes

Definição 5.4. Dada uma função $f : I \to \mathbb{R}$, diz-se que

i) f é crescente no intervalo I quando dados $x_1, x_2 \in I$, quaisquer, com $x_1 < x_2$, tem-se que $f(x_1) < f(x_2)$;

ii) f é decrescente no intervalo I quando dados $x_1, x_2 \in I$, quaisquer, com $x_1 < x_2$, tem-se que $f(x_1) > f(x_2)$.

Funções Crescentes e Decrescentes

O seguinte teorema estabelece um critério para determinar-se onde uma função é crescente ou decrescente:

Teorema 5.4. Seja $f(x)$ uma função derivável no intervalo (a, b).

a) Se $f'(x) = 0$ em (a, b), então $f(x)$ é constante em (a, b);

b) Se $f'(x) > 0$ em (a, b), então $f(x)$ é crescente em (a, b);

c) Se $f'(x) < 0$ em (a, b), então $f(x)$ é decrescente em (a, b).

Exemplos

5.6.4 Exemplos Determinar os intervalos nos quais as funções seguintes são crescentes ou decrescentes.

(i) $f(x) = x^3 + 1$.

Vamos derivar a função e analisar quais os números x tais que $f'(x) > 0$ e quais os números x tais que $f'(x) < 0$. Temos:

$f'(x) = 3x^2$.

Como $3x^2$ é maior que zero para todo $x \neq 0$, concluímos que a função é sempre crescente. A Figura 5.15 ilustra este exemplo.

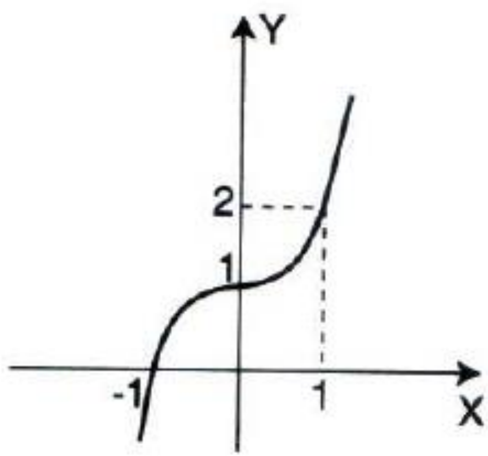


Figura 5.15

Exemplos

(ii) $f(x) = x^2 - x + 5.$

Temos $f'(x) = 2x - 1$. Então, para $2x - 1 > 0$ ou $x > 1/2$ a função é crescente. Para $2x - 1 < 0$ ou $x < 1/2$ a função é decrescente (ver Figura 5.16).

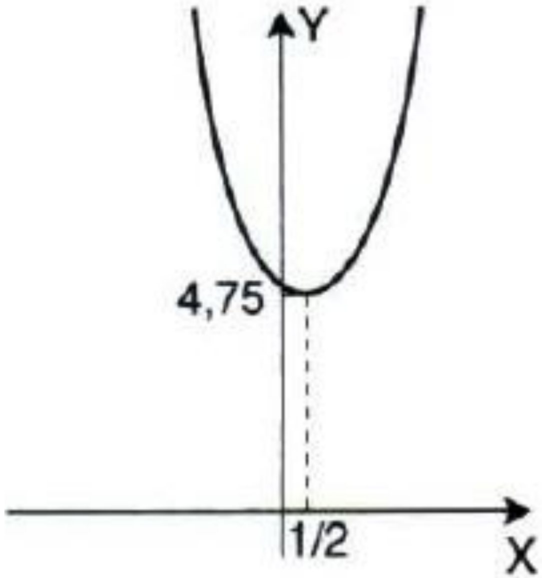


Figura 5.16

Exemplos

(iii) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4, & \text{se } x \leq 1 \\ -x - 1, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

O gráfico de $f(x)$ pode ser visto na Figura 5.17.

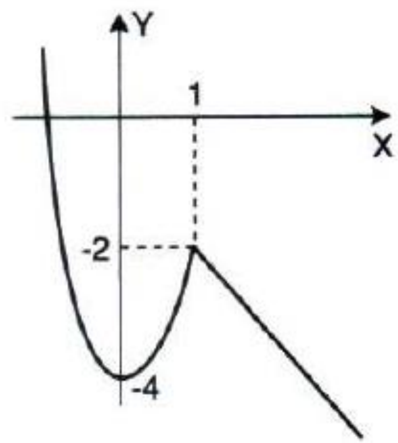


Figura 5.17

Se $x < 1$, então $f'(x) = 4x$. Temos:

$4x > 0$ para $x \in (0, 1)$;

$4x < 0$ para $x \in (-\infty, 0)$.

Se $x > 1$, temos $f'(x) = -1$. Então, $f'(x) < 0$ para todo $x \in (1, +\infty)$. Concluímos que f é crescente em $[0, 1]$ e decrescente em $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.

Tarefa 6

Resolver os seguintes exercícios, digitalizar e enviar no moodle grupos.

6. Dada a função $f(x) = x^3 - 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$, verifique em quais intervalos ela é crescente e em quais é decrescente.

Critérios para Determinar Extremos de uma Função

A seguir apresentaremos uma condição suficiente para a existência de máximo e mínimo.

Teorema 5.5. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em I exceto, talvez, num ponto crítico $x_0 \in I$. Se existir $a < x_0$ e $b > x_0$ tal que

i) $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, x_0)$, e $f'(x) < 0$, $\forall x \in (x_0, b)$, então f tem um máximo local em x_0; ou

ii) $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a, x_0)$, e $f'(x) > 0$, $\forall x \in (x_0, b)$ então f tem um mínimo local em x_0.

Exemplo

12) Determine os pontos de máximo e mínimo relativos da função bem como os seus extremos relativos.

a) $f(x) = 12x^5 + 27x^4 - 8x^3 - 1$.

Resolução. Sendo $f'(x) = 60x^4 + 108x^3 - 24x^2 = 12x^2(5x^2 + 9x - 2)$, temos $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -2$ ou $x = \frac{1}{5}$. Portanto, os pontos críticos de f são 0, -2 e $\frac{1}{5}$.

Para aplicar o Teorema 33, devemos examinar o sinal de f' à esquerda e à direita de cada um desses pontos.

Convém fatorar f':

$$f'(x) = 12x^2 \cdot 5(x+2)\left(x - \frac{1}{5}\right) = 60x^2(x+2)\left(x - \frac{1}{5}\right).$$

Exemplo

Os 3 pontos críticos dividem $\mathbb{R}$ em 4 intervalos e cada fator de f' tem um único sinal em cada intervalo. Confira estes sinais e os de f' no quadro abaixo:

		-2		0		$\frac{1}{5}$	
$60x^2$	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-\frac{1}{5}$	$-$		$-$		$-$		$+$
$x+2$	$-$		$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$		$-$		$-$		$+$

Exemplo

Ponto -2: f' é positiva à esquerda e negativa à direita de -2. Logo, f passa de crescente (à esquerda de -2) a decrescente (à direita de -2), o que caracteriza um ponto de máximo relativo.

Ponto 0: f' não muda de sinal neste ponto. Quer dizer, f é decrescente à esquerda e continua decrescente à direita de 0. Logo, 0 não é ponto de máximo nem de mínimo relativo.

Ponto $\frac{1}{5}$: O quadro de sinais mostra que $\frac{1}{5}$ é ponto de mínimo relativo, conforme o Teste da Derivada Primeira.

Resposta. f possui um ponto de máximo relativo que é -2 e um ponto de mínimo relativo que é $\frac{1}{5}$. Os extremos relativos de f são:

$$f(-2) = 111 \text{ e } f\left(\frac{1}{5}\right) = -\frac{3178}{3125}.$$

Critérios para Determinar Extremos de uma Função

Um outro critério para determinar extremos de uma função aplica a segunda derivada.

Teorema 5.6. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em todo $x \in I$ sendo I um intervalo aberto e $x_0 \in I$ um ponto crítico de *f*. Se existir $f''(x_0)$, e:

i) $f''(x_0) < 0$ então x_0 é ponto de máximo local

ii) $f''(x_0) > 0$ então x_0 é ponto de mínimo local

Exemplo

13) Determine os pontos de máximo e de mínimo relativo das funções:

a) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 72x^2 + 87$

Resolução. $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 144x = 12x(x^2 + x - 12)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -4 \quad \text{ou} \quad x = 3.$$

Vamos examinar cada um desses pontos críticos através do Teorema 34:

$$f''(x) = 36x^2 + 24x - 144.$$

Ponto 0: $f''(0) < 0$. Logo, 0 é ponto de máximo relativo.

Ponto -4: $f''(-4) > 0$. Logo, -4 é ponto de mínimo relativo.

Ponto 3: $f''(3) > 0$. Logo, 3 é ponto de mínimo relativo.

Tarefa 7

Resolver os seguintes exercícios, digitalizar e enviar no moodle grupos.

8. Determinar os pontos de máximos e mínimos locais da função $f(x) = 2x^4 + \frac{8}{3}x^3 - 8x^2, x \in \mathbb{R}$.