Aplicações da Derivada

Taxa de variação, Diferencial e Regra de L'Hospital

Taxa de Variação

Definição 5.1. Dada a função $f : I \to \mathbb{R}$ e $[a,\ b] \subseteq I$, a taxa de variação média de f em $[a, b]$ é o quociente

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{5.1}$$

A taxa de variação média indica quanto, em média, variou a função por unidade de variação da variável no intervalo considerado.

O significado da taxa de variação média será melhor compreendido através de alguns exemplos.

Exemplo

Por exemplo, suponha que $f(t)$ represente a população de certa comunidade t anos após 1º de janeiro de 2000. Sabendo-se que $f(1) = 1560$ e $f(5) = 1788$, a taxa de variação média da população de 01/01/2001 a 01/01/2005 foi de $\dfrac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = 57$ pessoas por ano.

Poderíamos também dizer que a "velocidade" com que aumentou essa população naquele período foi de 57 pessoas por ano.

Taxa de Variação

Na definição (5.1), tome $b - a = h$. Então, a taxa de variação da função $f : I \to \mathbb{R}$ no intervalo $[a,\ a+h] \subset I$ pode ser expressa por

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Supondo que f é derivável em $a \in I$, no limite $h \to 0$ obtemos a derivada de f em a:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Taxa de Variação

- Em particular, se $f\ (t)$ é o espaço percorrido por um móvel no tempo t, então a taxa de variação de f em t_0 é a velocidade instantânea $\boldsymbol{v(t)}$ do móvel no instante t_0. Quer dizer, a derivada $f\,'(x_0)$ é a taxa de variação de f em x_0.

$$\boxed{v(t) = f\,'(t)}$$

- Da mesma forma, aceleração instantânea $\boldsymbol{a(t)}$ de um móvel no instante t é a derivada da função velocidade $v(t)$:

$$\boxed{a(t) = v'(t)}$$

Tarefa 1

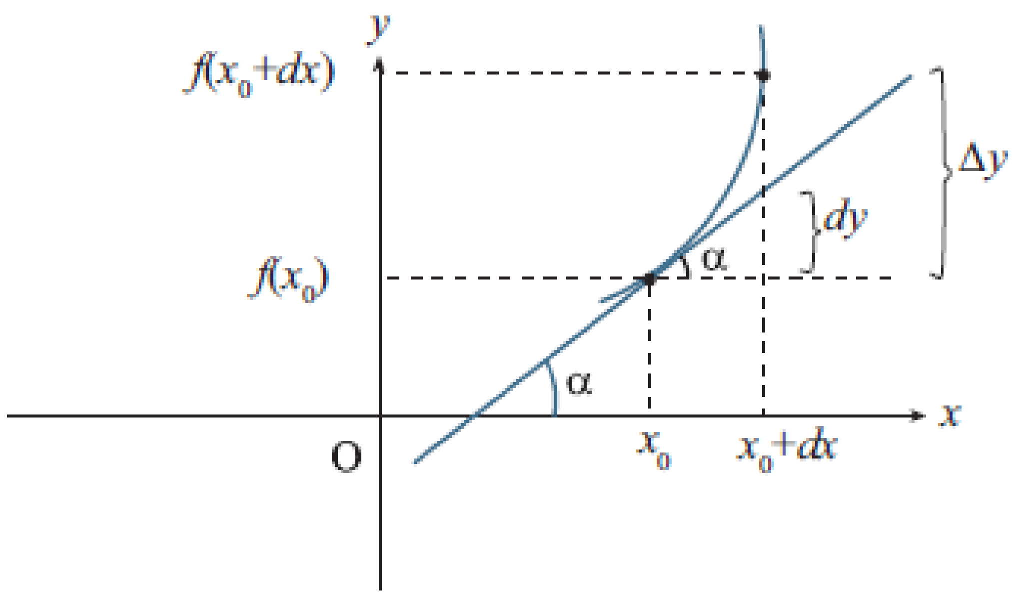
Resolver os seguintes exercícios, digitalizar e enviar no moodle grupos.

4. A posição de um móvel (em metros) no instante t é dada pela função $s(t) = 4t^2 + 3t - 5$. Calcule a sua velocidade no instante $t_0 = 2s$.

5. Calcule a aceleração do móvel do exercício anterior no instante t=2s.

Diferencial

Seja $f(x)$ uma função contínua e derivável em $x_0 \in I$. Da interpretação geométrica da derivada, sabemos que $f'(x_0)$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f, no ponto $(x_0, f(x_0))$. Veja a figura:



Diferencial

Seja dx um acréscimo a x_0 e defina $dy = \operatorname{tg}\alpha \cdot dx$. Como $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$, então

$$dy = f'(x_0)dx. \tag{4.24}$$

O número dy é chamado de diferencial da função $y = f(x)$, no ponto $x = x_0$.

Vamos denotar por Δy o acréscimo sofrido por f quando se dá um acréscimo dx a x_0, ou seja,

$$\Delta y = f(x_0 + dx) - f(x_0). \tag{4.25}$$

Diferencial

Se o acréscimo dx for suficientemente pequeno, podemos esperar que a diferença $\Delta y - dy$ é também pequena e podemos aproximar Δy pela diferencial dy, sendo $dy = f'(x_0)\,dx$, ou seja

$$f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx\,. \qquad (4.26)$$

Para entendermos melhor esse resultado, chame $x_0 + dx$ de x na equação (4.26). Em seguida, faça $dx = x - x_0$. Obtemos que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,. \qquad (4.27)$$

A equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ onde (x, y) são as coordenadas de um ponto da reta. Comparando com a expressão (4.27) segue que o gráfico da função $f(x)$, para x próximo de x_0, pode ser aproximado por uma linha reta (ou uma função afim).

Exemplo

Calcule um valor aproximado para $\sqrt[3]{65{,}5}$ usando diferenciais.

Seja $y = f(x)$ a função definida por $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Escrevemos:

$$y + \Delta y = \sqrt[3]{x + \Delta x} \text{ e } dy = \frac{1}{3x^{2/3}}\,dx.$$

Fazemos $x = 64$ e $\Delta x = 1{,}5$, isto porque 64 é o cubo perfeito mais próximo de 65,5.

Portanto,

$x + \Delta x = 65{,}5$, $dx = \Delta x = 1{,}5$ e

$$dy = \frac{1}{3(64)^{2/3}} \cdot 1{,}5 = \frac{1{,}5}{3 \cdot 16} = 0{,}03125.$$

Então,

$$\sqrt[3]{65{,}5} = \sqrt[3]{64 + 1{,}5} = \sqrt[3]{x + \Delta x} = y + \Delta y.$$

Fazendo $\Delta y \cong dy$, obtemos finalmente que:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{65{,}5} &\cong y + \Delta y = 4 + 0{,}03125 \\ &= 4{,}03125.\end{aligned}$$

Tarefa 2

Resolver os seguintes exercícios, digitalizar e enviar no moodle grupos.

8. Através da diferencial, obter uma aproximação de $\sqrt{50}$.

9. Obter uma aproximação de $e^{0,9}$ através da diferencial.

Regra de L'Hospital

Regra para cálculo de limites associados a indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Teorema 38. (Regra de L'Hospital). Sejam f e g funções deriváveis em todos os pontos de um intervalo aberto I, exceto talvez no ponto $a \in I$.

Suponhamos que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in I - \{a\}$. Então:

1) Se $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ e se $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

2) Se $\lim_{x \to a} |f(x)| = \lim_{x \to a} |g(x)| = +\infty$ e se $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Observação. O teorema vale também para limites laterais e limites no infinito.

Regra de L'Hospital

Observação. O teorema vale também para limites infinitos.

Observação. A regra de L'Hospital só pode ser aplicada para calcular o limite do quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ quando ocorre uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Em tal caso, toma-se o limite do quociente das derivadas (e não da derivada do quociente!) $\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Se esse limite existir, então o seu valor será o valor do limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$. Caso persista a indeterminação $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, aplica-se a regra de L'Hospital a $\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Exemplos

23) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\operatorname{sen} x - x}{\cos x + 2x - 1}$.

Resolução. Como $\lim\limits_{x\to 0}(6\operatorname{sen} x - x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x + 2x - 1) = 0$, podemos aplicar a regra de L'Hospital.

Logo, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\operatorname{sen} x - x}{\cos x + 2x - 1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\cos x - 1}{-\operatorname{sen} x + 2} = \dfrac{5}{2}$.

24) Calcule $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{2x^4+2x^3+5x^2+5x}$.

Resolução. Novamente estamos diante de um caso de indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$. (Verifique!)

Pela regra de L'Hospital,

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{2x^4+2x^3+5x^2+5x} = \lim_{x\to -1}\frac{3x^2}{8x^3+6x^2+10x+5} = \frac{3}{-7} = -\frac{3}{7}.$$

Exemplos

25) Calcule $\lim\limits_{x \to \pi^-} \dfrac{\ln(\cos 2x)}{(x-\pi)^2}$.

Resolução. Mais uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$. (Verifique!)

Aplicando o Teorema 38, temos: $\lim\limits_{x \to \pi^-} \dfrac{\ln(\cos 2x)}{(x-\pi)^2} = \lim\limits_{x \to \pi^-} \dfrac{-2\operatorname{tg} 2x}{2(x-\pi)}$.

Como $\lim\limits_{x \to \pi^-}(-2\operatorname{tg} 2x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to \pi^-} 2(x-\pi) = 0$, devemos aplicar o teorema outra vez: $\lim\limits_{x \to \pi^-} \dfrac{-2\operatorname{tg} 2x}{2(x-\pi)} = \lim\limits_{x \to \pi^-} \dfrac{-4\sec^2 2x}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2$.

Logo, $\lim\limits_{x \to \pi^-} \dfrac{\ln(\cos 2x)}{(x-\pi)^2} = -2$.

Exemplos

26) Calcule $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} + x}{e^{3x} + x}$.

Resolução. Temos: $\lim_{x \to +\infty} (e^{2x} + x) = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} (e^{3x} + x) = +\infty$. Podemos assim aplicar o Teorema 38: $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} + x}{e^{3x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2e^{2x} + 1}{3e^{3x} + 1}$.

Esse último limite nos leva também à indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando novamente o Teorema 38, temos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2e^{2x} + 1}{3e^{3x} + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4e^{2x}}{9e^{3x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{9} e^{-x} = \frac{4}{9} \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \frac{4}{9} \cdot 0 = 0.$$

Logo, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} + x}{e^{3x} + x} = 0$.

Exemplos

Observação. A regra de L'Hospital não se aplica para calcular, por exemplo, o $\lim_{x\to\infty} \frac{x - \cos x}{x}$, apesar de ser $\lim_{x\to\infty}(x - \cos x) = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} x = \infty$. Com efeito, derivando numerador e denominador, obtém-se a função $\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1}$ e $\lim_{x\to\infty}(1 + \operatorname{sen} x)$ não existe.

Nesse caso, o Teorema 38 não permite concluir que o limite proposto não existe. De fato, escrevendo $\frac{x - \cos x}{x} = 1 - \frac{\cos x}{x} = 1 - \cos x \cdot \frac{1}{x}$ e lembrando que a função $\cos x$ é limitada, percebemos que $\lim_{x\to\infty} \frac{x - \cos x}{x} = 1$.

Regra de L'Hospital

- São sete os casos de indeterminação. O Teorema 38, porém, permite aplicar a regra de L'Hospital somente para os casos $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.
- E quando surge alguma das demais indeterminações, não podemos aplicá-la?
- Podemos sim, mas não diretamente. Acompanhe com atenção os próximos exemplos para compreender o procedimento em cada caso.

Exemplos

27) Calcule o $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

Resolução. Temos uma indeterminação do tipo $\infty-\infty$. (Verifique!) Efetuando a soma das expressões entre parênteses, chegamos a um *quociente:* $\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$.

Como $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1-\ln x)=0$ e $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)\ln x=0$, podemos aplicar a regra de L'Hospital:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{(x-1)\cdot\dfrac{1}{x}+\ln x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1+x\ln x}.$$

Como $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$ e $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1+x\ln x)=0$, aplicamos novamente a regra de L'Hospital: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{x-1+x\ln x}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{1+1+\ln x}=\dfrac{1}{2}$.

Logo, $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Exemplos

28) Calcule o $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \text{cotg}\, 3x$.

Resolução. O leitor deve identificar uma indeterminação do tipo $0 \cdot \infty$. Nesse caso, procuramos escrever a expressão $x \cdot \text{cotg}\, 3x$ como um *quociente*.

Podemos escrever $x \cdot \text{cotg}\, 3x = \dfrac{\text{cotg}\, 3x}{\dfrac{1}{x}}$ ou então

$$x \cdot \text{cotg}\, 3x = \frac{x}{\dfrac{1}{\text{cotg}\, 3x}} = \frac{x}{\text{tg}\, 3x}.$$

Qualquer opção conduz ao resultado, porém escolhemos a segunda.

Como $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0} \text{tg}\, 3x = 0$, aplicamos a regra de L'Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\text{tg}\, 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3 \sec^2 3x} = \frac{1}{3}.$$ Logo, $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \text{cotg}\, 3x = \dfrac{1}{3}$.

Exemplos

29) Calcule $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Resolução. Dessa vez, a indeterminação é do tipo 1^{∞}. Seja $y=(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$. Aplicando o logaritmo a ambos os lados da igualdade (o que é possível pois $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}>0$, para x próximo de 0), temos: $\ln y=\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Através de uma propriedade do logaritmo, podemos expressar $\ln y$ como um quociente: $\ln y=\frac{1}{x^2}.\ln\cos x=\frac{\ln \cos x}{x^2}$.

Vamos calcular o $\lim_{x\to 0}\ln y$ para depois obtermos o $\lim_{x\to 0} y$.

Como $\lim_{x\to 0}\ln\cos x=0$ e $\lim_{x\to 0}x^2=0$, podemos aplicar a regra de L'Hospital: $\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{-\text{tg}\, x}{2x}$.

Exemplos

Aplicando novamente a regra de L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{-\sec^2 x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Como a função logarítmica é contínua, o Teorema 22 garante que:

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \ln\left[\lim_{x\to 0} y\right] = -\frac{1}{2}.$$

Logo, $\lim_{x\to 0} y = e^{-\frac{1}{2}}$, ou seja, $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$.

Exemplos

30) Calcule $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$.

Resolução. A indeterminação é do tipo ∞^0.

Seja $y = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$. Então $\ln y = \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x$.

Para escrever $\ln y$ como um *quociente*, lembremos que $\cos x = \dfrac{1}{\sec x}$ e, portanto, $\ln y = \dfrac{\ln \operatorname{tg} x}{\sec x}$.

Agora é possível aplicar a regra de L'Hospital, pois

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \ln \operatorname{tg} x = \infty \ \text{ e } \ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \sec x = \infty .$$

Exemplos

Logo,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \ln y = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}}{\sec x \cdot \operatorname{tg} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec x}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Assim, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \ln y = 0$, ou seja, $\ln\left[\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} y\right] = 0$, donde, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} y = 1$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\cos x} = 1$.

Tarefa 3

Resolver os seguintes exercícios, digitalizar e enviar no moodle grupos.

10. Calcular:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(6x)}{4x}$

12. Calcular $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1} \right)$.

13. Calcular:

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$