(10) $f(x) = x^4$, $x \in [-1,1]$.

$f'(x) = 4x^3$; $f''(x) = 12x^2$

Para encontrar o ponto de inflexão, a derivada segunda em x_0 deve ser zero.

$$f''(x) = 12x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f''(0) = 0 \ , \ f''(x) \geq 0 \text{ para todo } x.$$

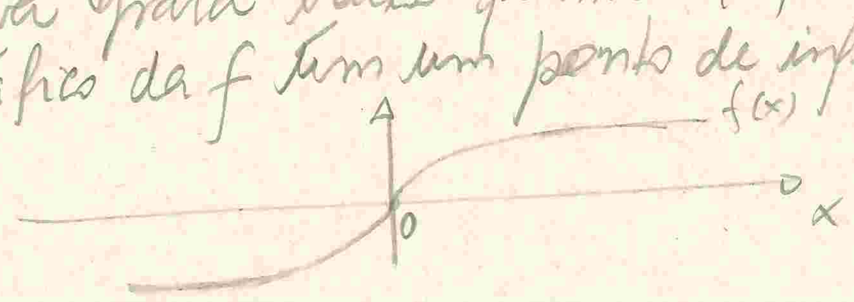
Porém, ao analisarmos o gráfico, vemos que ele tem concavidade sempre para cima. Portanto, apesar de termos $f''(0)=0$ a função não tem ponto de inflexão.

(11) $f(x) = x^{1/3}$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot x^{-5/3} = -\frac{2}{9x^{5/3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}},$$

ambas definidas para todo $x \neq 0$. A função está definida $x=0$ e $f(0)=0$ mas não f' e f''. Para sabermos se em $x=0$ há um ponto de inflexão, observamos que $f''(x)>0$ para $x<0$ e $f''(x)<0$ em $x>0$, logo, f é côncava para cima em $(-\infty,0)$ e é côncava para baixo quando $(0,+\infty)$. Em $x=0$, o gráfico da f tem um ponto de inflexão.



(12) $f(x) = x(x+2)^2 = x(x^2+4x+4)$
$= x^3+4x^2+4x$

$f(x)=0$, quando $x(x^2+4x+4)=0$

$\boxed{x=0}$; $x^2+4x+4=0$

$x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2-4.1.4}}{2.1} \Rightarrow x = \dfrac{-4\pm\sqrt{0}}{2}$

Raízes

$\boxed{x=-2}$

Isso significa que o gráfico da função toca o eixo x nos pontos (0,0) e (-2,0).

Temos que $f(x) \to +\infty$ quando $x \to +\infty$ e $f(x) \to -\infty$ quando $x \to -\infty$.

Para encontrar os extremos da função, devemos encontrar a derivada primeira e verificar em quais pontos ela é igual a zero. Assim:

$f'(x) = 3x^2+8x+4 = 0$

$x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{8^2-4.3.4}}{2.3} = \dfrac{-8\pm\sqrt{16}}{6} = \dfrac{-8\pm 4}{6}$ $\nearrow -\frac{2}{3}$ $\searrow -2$

$x_1 = -\frac{2}{3}$ e $x_2 = -2$. Devemos, então, verificar o valor da derivada segunda nestes pontos para determinar se são pontos de mínimo ou máximo.

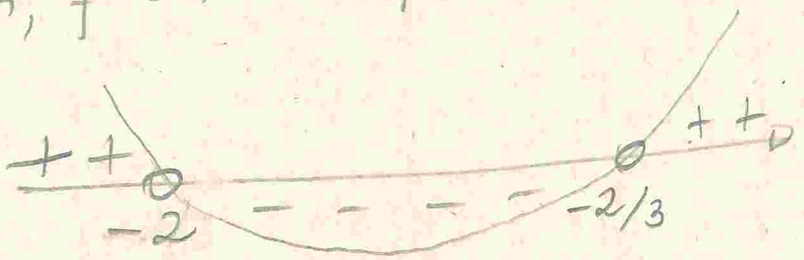
$f''(x) = 6x+8$

$f''(x_1) = \cancel{6}\cdot\left(-\frac{2}{\cancel{3}}\right) + 8 = -4 + 8 = 4 > 0$ (mínimo)

$f''(x_2) = 6\cdot(-2) + 8 = -12 + 8 = -4 < 0$ (máximo)

Logo, x_1 é ponto de mínimo local e x_2 é ponto de máximo local.

Também, $f'(x) > 0$ quando $3x^2 + 8x + 4 > 0$



Ou seja, $f'(x) > 0$ para $x > -2/3$ e $x < -2$ e $f'(x) < 0$ para $-2 < x < -2/3$. A função então é crescente em $(-\infty, -2)$ e $\left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$ e decrescente em $(-2, -2/3)$.

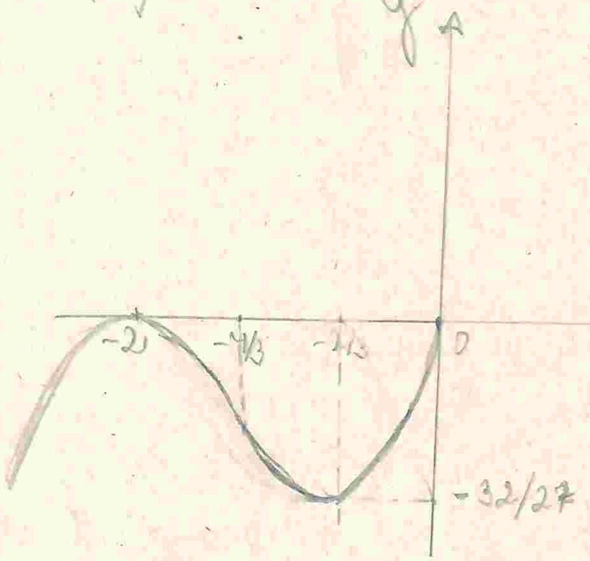
A partir da $f''(x) = 0$, determinamos o ponto de inflexão:

$$f''(x) = 6x + 8 = 0 \Rightarrow 6x = -8 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$$

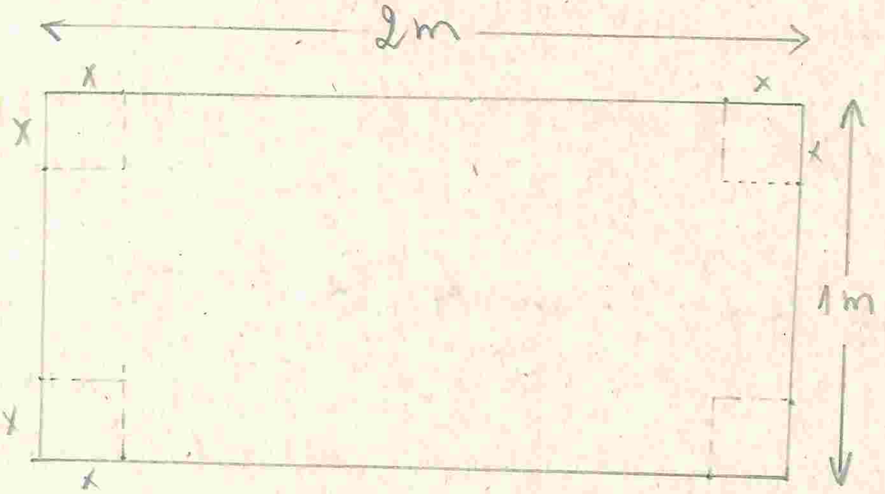
Para $x > -\frac{4}{3}$, temos $f''(x) > 0$ e para $x < -\frac{4}{3}$, temos $f''(x) < 0$.

O gráfico da função é côncavo para cima para $\left(-\frac{4}{3}, +\infty\right)$ e côncavo para baixo em $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$.

Com essas informações, podemos esboçar o gráfico



13)



Seja x o comprimento do lado dos quadrados a serem recortados. Após o recorte dos mesmos, a lâmina permite fabricar uma caixa de altura x, largura $1-2x$ e comprimento $2-2x$. Portanto, o volume como uma função de x é:

$$V(x) = x.(1-2x).(2-2x) = 2x - 6x^2 + 4x^3,$$

onde $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

tamanho máximo de x para fazer 2 cortes na largura (1m).

Temos que $V'(x) = 2 - 12x + 12x^2 = 0$

$x_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \notin [0, \frac{1}{2}]$ e
$\approx 0{,}79$

$x_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \in [0, \frac{1}{2}]$.
$= 0{,}21$

$V''(x) = -12 + 24x$

Fazendo $V''(x_2) = -12 + 24x_2$ temos:

$V''\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) = -12 + 24 \cdot \left(\frac{3-\sqrt{3}}{\cancel{6}}\right) = -12 + 4 \cdot (3 - \sqrt{3})$

$= -12 + 12 - 4\sqrt{3} = -4\sqrt{3} < 0$. Isso

significa que o volume é máximo quando

$x = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ metros.

14 $T_n(x; 0)$, $n = 1, 2, 3$ p/ $f(x) = e^x$ em $x_0 = 0$.

$f(x) = e^x$; $f^{(n)}(x) = e^x$. Portanto, em $x = x_0 = 0$,

$f^{(n)}(0) = 1$.

$T_1(x; 0) = 1 + x$

$T_2(x; 0) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$

$T_3(x; 0) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$

(15) $f(x) = \ln x \,, \quad x > 0 \,, \quad T_3(x;1) \cdot R_3(1,1;1)$.

Temos que $f(1) = \ln 1 = 0$ e as derivadas até quarta ordem são:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1$$

$-x^{-2}$
$+2 \cdot x^{-3}$
$-6x^{-4}$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f^{(3)}(1) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4} \Rightarrow f^{(4)}(1) = -6$$

Portanto,

$$T_3(x,1) = 0 + 1.(x-1) - \frac{1}{2!}.(x-1)^2 + \frac{2.}{3!}(x-1)^3$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{6}(x-1)^3$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$$

Tomando $x = 1,1$, obtemos:

$$T_3(1,1;1) = 0 + 1.(1,1-1) - \frac{1}{2}(1,1-1)^2 + \frac{1}{3}(1,1-1)^3$$

$$T_3(1,1;1) = 0,1 - \frac{1}{2}(0,1)^2 + \frac{1}{3}(0,1)^3 = 0,09533\ldots$$

$$\ln(1,1) = 0,09533 + R_3(1,1;1) \text{, onde}$$

$$R_3(1,1;1) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(1,1-1)^4 =$$

$$= -\frac{6}{\cancel{24}\,c^4}\cdot(0,1)^4 = -\frac{(0,1)^4}{4c^4}$$

Para algum ponto c entre 1 e 1,1.

Portanto, se aproximarmos ln (1,1) pelo valor 0,09533 o erro que se comete é

$$|R_3| < \frac{(0,1)^4}{4} = 0{,}000025, \text{ pois } c > 1.$$

Esse erro é muito pequeno e só afeta o valor da aproximação a partir da quinta casa decimal.

Obs: $f(x) = T_n(x; x_0) + R_n(x, x_0)$, onde

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Além disso, se $|f^{(n+1)}(c)| \leq K$, $K > 0$ então

$$|R_n| \leq \frac{K}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$$
