Regra de L'Hospital

10 a) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(6x)}{4x}$. A indeterminação é do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando a Regra 1,

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\operatorname{sen}(6x))'}{(4x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{6\cos(6x)}{4}$$

$$= \frac{6}{4} \cdot \cos(6x) = \frac{6}{4} \cdot \cos 0 = \frac{6}{4} \cdot 1 = \frac{6}{4}$$

---

b) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x}$. A indeterminação é do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Pela Regra 1, temos $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'}$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x}$. A indeterminação continua. aplicando a regra pela 2ª vez,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \frac{2}{e^x} = 0$$

Regra de L'Hospital

(11) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\overset{f(x)}{\left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)} \cdot \overset{g(x)}{tg\, x} \right]$

Para limites com a forma indeterminada $0 \times \infty$, fazemos

$$\lim_{x \to a} f(x) \times g(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ ou } \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Neste caso,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)'}{\left(\frac{1}{tg}\right)'} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)'}{(cotg\, x)'} =$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\frac{2}{\pi}}{\frac{-cossec^2 x}{1}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} + \frac{\frac{2}{\pi}}{\frac{1}{sen^2 x}} =$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{sen^2 x}{1} = \frac{2}{\pi} //$$

(7a)

12) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right)$

Nesse caso a indeterminação é da forma $\infty - \infty$.

Aplicamos o M.M.C:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{2(x-1) - (x^2-1)}{(x^2-1).(x-1)} \right) =$$

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{2x - 2 - x^2 + 1}{(x^2-1).(x-1)} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{-x^2+2x-1}{x^3-x^2-x+1}$$

Agora temos um limite da forma $\frac{0}{0}$, então

$$\lim_{x \to 1} \frac{(-x^2+2x-1)'}{(x^3-x^2-x+1)'} = \lim_{x \to 1} \frac{-2x+2}{3x^2-2x-1}$$ (ainda é $\frac{0}{0}$)

Logo, $\lim_{x \to 1} \frac{(-2x+2)'}{(3x^2-2x-1)'} = \lim_{x \to 1} \frac{-2}{(6x-2)}$

Finalmente temos $= -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ //

76

~~(12)~~

Obs: Regra 3:

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} g(x) \left[\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right].$$

Em seguida, aplique a regra 2.

---

(13) a) $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$. A indeterminação é da forma 1^∞. Pela Regra 4:

$$\ln\left(\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\ln (1+x)^{1/x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Que é do tipo $\frac{0}{0}$. Pela Regra 1,

$$\ln\left(\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{(\ln(x+1))'}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x} = 1$$

Invertendo o logaritmo:

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Regra 4: $\ln\left(\lim_{x \to a} (f(x))^{g(x)}\right) = \lim_{x \to a} \ln (f(x))^{g(x)}$

Quando 1^∞, ∞^0, 0^0.

b) $\lim_{x \to 0^+} x^x$ Este limite é da forma 0^0

Pela Regra 4,

$$\ln\left(\lim_{x \to 0^+} (x)^x\right) = \lim_{x \to 0^+} \ln (x)^x = \lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x,$$

que é do tipo $0 \times \infty$ e pode ser calculado como

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

Usando a Regra 1. Portanto,

$$\ln\left(\lim_{x \to 0^+} x^x\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} (x^x) = 1$$

Teoremas de Rolle e do Valor Médio

14) Pelo teorema de Rolle $f'(x_0) = 0$. Então,

$$f'(x) = (x^3 - 4x)' = 3x^2 - 4$$

$$f'(x_0) = 3 \cdot x_0^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 3x_0^2 = 4$$

$$x_0^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} =$$

$$x_0 = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ou $x_0 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ e $x_1 = +\frac{2}{\sqrt{3}}$

(15) a) A função x^2 é contínua em $[-1, 4]$, é derivável em $(-1, 4)$ e tem derivada nula em $x=0$ mas $f(-1) = 1 \neq f(4) = 16$

b) Em $x=0$; $f'(0) = 0$, e $f(-2) = f(2) = \frac{1}{3}$, mas $[-2,2] \not\subset Dom(f)$ pois $-1 \notin Dom(f)$ e $1 \notin Dom(f)$.

— // — // —

(16) A função é um polinômio e como tal satisfaz as hipóteses do teorema e

$$f'(x) = (x^3 + 3x^2 - 5)' = 3x^2 + 6x$$

Queremos determinar x_0 tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(2) - f(-1)}{2-(-1)} = \frac{15-(-3)}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

ou seja $f'(x_0) = 3.x_0^2 + 6x_0 = 6$

$$3x_0^2 + 6x_0 - 6 = 0 \ (\div 2) \Rightarrow x_0^2 + 2x_0 - 2 = 0$$

$$x_0 = -1 + \sqrt{3}$$

Obs: $x_1 = -1 - \sqrt{3}$ não faz parte da resposta porque não pertence ao intervalo $[-1, 2]$ dado.