Taxa de Variação

(1) A variação média de sua altura nesse intervalo de tempo é:

$$\frac{150 - 50}{5} = 20 \text{ cm/ano}$$

Isso significa que a árvore cresceu 20 cm a cada ano, em média.
Observe que a taxa média de variação pode ser entendida como uma velocidade. Assim, podemos dizer que a velocidade de crescimento da árvore foi de 20 cm ao ano.

(2) $S_0 = 100$ Km
$S_f = 200$ Km
$t = 2h$

A variação média da posição do carro durante a viagem é, portanto

$$\frac{S_f - S_0}{t} = \frac{200 - 100}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ Km/h}$$

Isso significa que, a cada hora, o carro percorreu, em média, 50 Km. Podemos dizer que a velocidade do carro foi de 50 Km por hora.
Em resumo, a taxa de variação média de uma função que descreve a posição de um móvel num dado intervalo de tempo é a velocidade do móvel.

3) $S_0 = 100\ Km$

$V_0 = 0$

$S_f = 200\ Km$

$t = 2h$

$V_f = 100\ Km/h$

$a = ?$

$$a_m = \frac{V_f - V_0}{t}$$

$$a_m = \frac{100 - 0}{2}$$

$$a_m = \frac{100}{2} = 50\ \frac{Km/h}{h} = 50\ Km/h^2$$

Portanto, a função que descreve a velocidade do carro cresce, em média, 50 Km/h, a cada hora.

A taxa de variação média de uma função que descreve a velocidade de um móvel num dado intervalo de tempo, é a aceleração média do móvel.

4) $s(t) = 4t^2 + 3t - 5$

$v = ?$

$t_0 = 2s$

A velocidade $v(t)$ de um móvel no instante t é a derivada da função $f(t)$ que descreve a posição do móvel, no instante t:

$$v(t) = f'(t)$$

Neste exercício temos $v(t) = s'(t)$, ou seja,

$$v(t) = (4t^2 + 3t - 5)' = 4.2.t + 3 - 0 = 8t + 3$$

No instante $t = 2s$, temos:

$$v(2) = 8.2 + 3 = 19\ m/s$$

(5) A aceleração instantânea $a(t)$ de um móvel no instante t é a derivada da função velocidade $v(t)$: $a(t) = v'(t)$.

Como $v(t) = f'(t)$ e $v'(t) = f''(t)$, segue que a aceleração instantânea é a derivada de 2ª ordem da função posição: $a(t) = f''(t)$.

Portanto, $a(t) = v'(t) = (8t+3)'$

$a(t) = 8 \ m/s^2$

Diferencial

(6) A diferencial de $y = x^2$ é $dy = 2x dx$.

Em $x = 1$, $dy = 2 \cdot 1 dx = 2dx$.

$1 + dx = 1{,}001 \Rightarrow dx = 1{,}001 - 1 = 0{,}001$. Logo,

$dy = 2 \cdot 0{,}001 = 0{,}002$.

O valor do acréscimo Δy é

$\Delta y = f(1+dx) - f(1) = (1{,}001)^2 - 1^2 = 0{,}002001$

O erro que se comete ao se fazer a aproximação $\Delta y \approx dy$ é igual a $\Delta y - dy = 0{,}000001$ um número muito pequeno. A aproximação pode ser considerada muito boa.

7) $f(x) = a.x$; $f'(x) = (a.x)' = a$ para todo x

Temos então $dy = f'(x_0) . \Delta x$

$$dy = a . \Delta x$$

Em particular, se $a = 1$, temos $y = x$ e

$$dy = \Delta x$$

ou seja, $dx = \Delta x$.

Assim, escrevemos também

$$dy = f'(x_0) . dx$$

para indicar a diferencial da função $y = f(x)$.

8) $f(x) = \sqrt{x}$. O ponto x_0 mais próximo de 50 cuja raiz quadrada se obtém imediatamente é 49. Assim, tomamos $x_0 = 49$ e temos

$$\Delta x = 50 - 49 = 1$$

$$f'(x) = (\sqrt{x}) = (x^{1/2})' = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Obtemos $f'(49) = \frac{1}{2\sqrt{49}} = \frac{1}{2.7} = \frac{1}{14}$ e

$dy = f'(49) . \Delta x = \frac{1}{14} . 1 = \frac{1}{14}$ Logo,

$\Longrightarrow$

cont.

$$\sqrt{50} = f(50)$$
$$\cong f(49) + dy$$
$$= \sqrt{49} + \frac{1}{14}$$
$$= 7 + \frac{1}{14}$$
$$= \frac{99}{14} \cong 7{,}0714.$$

---

9) Tomando $f(x) = e^x$ e $x_0 = 1$, temos,

$$\Delta x = x - x_0 = 0{,}9 - 1 = -0{,}1$$

De $f'(x) = (e^x)' = e^x$

$$f'(x_0) = f'(1) = e^1 = e$$

$$dy = f'(1) \cdot \Delta x$$
$$= e \cdot (-0{,}1) = -\frac{e}{10}$$

Logo, $e^{0{,}9} = f(0{,}9)$

$$\cong f(1) + dy$$
$$= e - \frac{e}{10}$$
$$= \frac{9e}{10} \cong 2{,}44645.$$