Derivada

Derivada da função composta e das funções elementares

Derivada da função composta

Sejam u uma função derivável no ponto x e f uma função derivável no ponto $u(x)$. Então, se existir a composta $h = f \circ u$ ela será derivável no ponto x e teremos

$$h'(x) = f'(u(x)).u'(x). \tag{4.12}$$

Portanto, a derivada da composta é igual à derivada da função f, calculada em $u(x)$, vezes a derivada de u, calculada em x.

A expressão (4.12) também é chamada de regra da cadeia.

Exemplos

Exemplo 8. Calcular a derivada de $h(x) = (2x^3 + 4x + 1)^5$, $x \in \mathbb{R}$.

Resolução: Fazendo $u(x) = 2x^3 + 4x + 1$ e $f(u) = u^5$, obtemos que $h(x) = f(u(x))$. Aplicando a regra da cadeia,

$$h'(x) = f'(u) \cdot u' = 4u^4 \cdot u' = 4(2x^3 + 4x + 1)^4 \cdot (6x^2 + 4).$$

Exemplos

11) Se $f(x) = (3x+2)^4$, calcule $f'(x)$.

Resolução. Podemos escrever $f(x) = (g \circ u)(x)$, sendo

$$u(x) = 3x + 2 \text{ e } g(u) = u^4.$$

Pelo Teorema 27, $f'(x) = g'[u(x)] \cdot u'(x)$.

Como $g'(u) = 4u^3$, temos que $g'[u(x)] = 4[u(x)]^3 = 4(3x+2)^3$ e $u'(x) = 3$. Logo, $f'(x) = 4(3x+2)^3 \cdot 3 = 12(3x+2)^3$.

Exemplos

12) Sendo $y = \dfrac{1}{(x^6-1)^4}$, calcule y'.

Resolução. Escrevendo $y = (x^6-1)^{-4} = [u(x)]^{-4}$ e aplicando a regra da cadeia, temos $y' = -4[u(x)]^{-5} \cdot u'(x) = -4\,(x^6-1)^{-5} \cdot 6x^5$, ou seja, $y' = \dfrac{-24x^5}{(x^6-1)^5}$.

Exemplos

13) Seja $g(t)=\sqrt[3]{t^2+t+1}$. Calcule $g'(-1)$.

Resolução. Apliquemos a regra da cadeia, agora de maneira mais direta, à função $g(t)=(t^2+t+1)^{\frac{1}{3}}$ para calcular $g'(t)$:

$$g'(t)=\frac{1}{3}(t^2+t+1)^{\frac{1}{3}-1}\cdot(2t+1)=\frac{2t+1}{3\sqrt[3]{(t^2+t+1)^2}}.$$

Logo, $g'(-1)=\dfrac{-1}{3\sqrt[3]{1}}=\dfrac{-1}{3}$.

Exemplos

14) Seja $f(x) = (x^3 - 2)^2 \cdot (x^2 + 1)^3$. Calcule $f'(x)$.

Resolução. A função f é um produto de duas funções, o que nos obriga a usar a regra do produto: $(uv)' = uv' + u'v$, juntamente com a regra da cadeia:

$$f'(x) = (x^3 - 2)^2 3(x^2 + 1)^2 2x + 2(x^3 - 2)3x^2(x^2 + 1)^3$$

$$= 6x(x^3 - 2)^2(x^2 + 1)^2 + 6x^2(x^3 - 2)(x^2 + 1)^3 .$$

Tarefa 5

Resolver os seguintes exercícios, digitalizar e enviar no moodle grupos.

1) Determine a derivada da função indicada:

11) $f(x) = (x^2 + 5x + 2)^7$

12) $f(x) = \left(\dfrac{3x + 2}{2x + 1}\right)^5$

13) $f(x) = \dfrac{1}{2}(2x^5 + 6x^{-3})^5$

17) $y = (x^3 - 6)^5$

Derivadas das funções elementares

1. Derivada da Função Exponencial de Base *a*

Seja $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ e $x \in \mathbb{R}$. A derivada desta função é

$$f'(x) = a^x \ln a \, . \tag{4.14}$$

De fato,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} \, .$$

$$= a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a \, .$$

O último limite é um limite fundamental apresentado no módulo I.

Derivadas das funções elementares

1. Derivada da Função Exponencial de Base *a*

Exemplo 10. Calcule a derivada da função $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Resolução: Temos que $f'(x) = e^x \ln e = e^x$.

Derivadas das funções elementares

2. Derivada da Função Logarítmica

A função $g(x) = \log_a x$ é a inversa da função $y = f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$. Sabemos que $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Podemos então aplicar a fórmula (4.13) para calcular $(f^{-1})'(y)$:

$$g'(y) = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y \ln a}.$$

Indicando a variável de g por x, obtemos

$$g'(x) = \frac{1}{x \ln a}. \tag{4.15}$$

Derivadas das funções elementares

2. Derivada da Função Logarítmica

Exemplo 11. Calcule a derivada da função $g(x) = \ln x,\ \ x \in (0, +\infty)$.

Resolução: Nesse caso, a base é a natural, $a = e$ e $\ln e = 1$. Então,

$$g'(x) = \frac{1}{x}.$$

Derivadas das funções elementares

3. Derivada da Função Potência

A derivada da função $y = x^r$, chamada função potência, onde r é um número real qualquer, pode ser calculada usando o logaritmo do seguinte modo:

$$\ln y = \ln x^r = r \ln x .$$

Agora, calcule a derivada de ambos os lados da igualdade, com respeito a x:

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(r \ln x) .$$

Aplicando resultados anteriores você obtém que $\frac{}{y} \cdot y' = \frac{}{x}$, ou ainda,

$$y' = \frac{ry}{x} = \frac{rx^r}{x} = rx^{r-1} .$$

Portanto, a derivada da função $y = x^r$ é

$$y' = rx^{r-1} . \qquad (4.16)$$

Derivadas das funções elementares

3. Derivada da Função Potência

Exemplo 12. Calcule a derivada da função $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$.

Resolução: Temos que $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, portanto

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Derivadas das funções elementares

4. Derivada da Função Seno

Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$. Aplicando a definição de derivada, obtemos $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$.

Usando a identidade trigonométrica $\operatorname{sen}(x+h) = \operatorname{sen} x.\cos h \operatorname{sen} x$, segue que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\operatorname{sen} x \frac{(\cosh - 1)}{h} + \frac{\operatorname{sen} h}{h} \cos x \right]$$

$$= \operatorname{sen} x \lim_{h \to 0} \frac{\cosh - 1}{h} + \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

onde $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$ e

Derivadas das funções elementares

4. Derivada da Função Seno

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 h-1}{h(\cos h+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{-\operatorname{sen}^2 h}{h(\cos h+1)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}\cdot\lim_{h\to 0}=\frac{\operatorname{sen} h}{\cos h+1}=0.$$

Logo,

$$f'(x)=\cos x \qquad (4.17)$$

ou seja, $(\operatorname{sen} x)'=\cos x$.

Derivadas das funções elementares

5. Derivada da Função Cosseno

O cálculo da derivada de $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, pode ser feito como no caso do $\operatorname{sen} x$. Outra maneira mais simples é a seguinte.

Como $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ segue que

$$(\cos x)' = \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{sen} x.$$

Portanto,

$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x \qquad (4.18)$$

Derivadas das funções elementares

6. Derivada da Função Tangente

Aplicando a regra do quociente à relação $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, obtemos

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (4.19)$$

Portanto, a derivada da função $\operatorname{tg} x$ é $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$.

Derivadas das funções elementares

7. Derivada da Função Arco Seno

A função $y = \operatorname{arcsen} x$, $x \in [-1,\ 1]$, é a inversa de $x = \operatorname{sen} y$. Aplicando a regra (4.13), obtemos:

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\ .$$

Portanto,

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},\quad x \in (-1, 1). \tag{4.20}$$

Derivadas das funções elementares

8. Derivada da Função Arco Cosseno

A função $y = \arccos x$, $x \in [-1,\ 1]$, é a inversa da função $x = \cos y$. Aplicando a regra da derivada da inversa, obtemos:

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{-\operatorname{sen} y} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ .$$

Portanto,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\ x \in (-1,\ 1). \qquad (4.21)$$

Derivadas das funções elementares

9. Derivada da Função Arco Tangente

A função $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$, é a inversa da função $x = \operatorname{tg} y$. Então,

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Assim,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \; x \in \mathbb{R} \qquad (4.22)$$

Derivadas das funções elementares

10.Derivada da Função Arco Cotangente

A função $y = \text{arccotg}\, x$, $x \in (0, \pi)$, é a inversa da função $x = \text{cotg}\, y$.

Então, $y' = \dfrac{1}{x'} = \dfrac{1}{-\text{cossec}^2 y} = -\dfrac{1}{1+\text{cotg}^2 y} = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Assim,

$$(\text{arccotg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \qquad (4.23)$$

Derivadas das funções elementares

Exemplos:

Exemplo 13. Calcule a derivada das funções:

a) $y = \operatorname{arcsec} x$ e b) $y = \operatorname{arccos}\sec x$

Resolução:

a) Sendo $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, temos $y = \arccos\left(\dfrac{1}{x}\right)$, que é a inversa da função $\dfrac{1}{x} = \cos y$. Então

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{(\sec y)'} = \frac{1}{\operatorname{tg} y \cdot \sec y} = \frac{\cos^2 y}{\operatorname{sen} y} = \frac{\cos^2 y}{\sqrt{1-\cos^2 y}}.$$

Lembrando que $\cos y = \dfrac{1}{x}$, obtemos $y' = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.

Derivadas das funções elementares

Exemplos:

b) Sendo $\operatorname{cossec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$, temos $y = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ que é a inversa da função $\dfrac{1}{x} = \operatorname{sen} y$. Então,

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{(\operatorname{cossec} y)'}$$

$$= \frac{1}{-\operatorname{cotg} y \cdot \operatorname{cossec} y} = -\frac{\operatorname{sen}^2 y}{\cos y} = -\frac{\operatorname{sen}^2 y}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}}.$$

Como $\operatorname{sen} y = \dfrac{1}{x}$ então, $y' = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.

Derivadas das funções elementares

11.Derivada das Funções Hiperbólicas

$(\text{senh } x)' = \cosh x$	$(\text{tgh } x)' = \text{sech }^2 x$
$(\cosh x)' = \text{senh } x$	$(\text{cotgh } x)' = -\text{cossech }^2 x$
$(\text{sech } x)' = -\text{tgh } x \cdot \text{sech } x$	$(\cos\sec hx)' = -\text{cotgh } x \cdot \cos\sec hx$

Derivadas das funções elementares

12. Derivada das Funções Hiperbólicas Inversas

$(\text{arcsenh } x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$(\text{arccosh } x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$
$(\text{arctgh } x)' = \dfrac{1}{1-x^2}, \quad \lvert x \rvert < 1$	$(\text{arcctgh } x)' = \dfrac{1}{x^2-1}, \quad \lvert x \rvert > 1$
$(\text{arcsech } x)' = -\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < x < 1$	$(\text{arccossech } x)' = -\dfrac{1}{\lvert x \rvert \sqrt{x^2+1}}, \quad x \neq 0$

Tarefa 6

Resolver os seguintes exercícios, digitalizar e enviar no moodle grupos.

1) Determine a derivada da função indicada:

8) $f(x) = 3^x$

9) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$

10) $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

14) $y = \ln(x^6 - 1)$