Derivada

Derivada por definição,

equação da reta tangente &
derivadas laterais

Derivada

Definição 4.1. A derivada de uma função $f : I \to \mathbb{R}$ em relação à variável $x \in I$ é a função $f'(x)$ dada por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

A derivada está definida em todo ponto x onde o limite exista. Diz-se, nesse caso, que a função $f(x)$ é derivável em x.

Derivada

Observação:

Na notação de Leibniz, a derivada de uma função $f(x)$ também é indicada por $\frac{d}{dx}f(x)$ ou $\frac{df(x)}{dx}$.

A derivada de uma função $f(x)$ em um ponto x_0 pode ser expressa também como

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Basta tomar $x = x_0$ na (4.1) e, em seguida, fazer $x_0 + h = x$. O limite $h \to 0$ é então equivalente ao limite $x \to x_0$.

Quando $x \in I$ é uma extremidade do intervalo I, o limite que define $f'(x)$ é, na verdade, apenas um limite lateral e a derivada coincide com o que será chamado de "derivada lateral" mais adiante neste capítulo.

Exemplos

Exemplo 1. Calcular a função derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R};$

b) $f(x) = |x|, \forall x \in \mathbb{R};$

c) $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$, onde c é uma constante.

Resolução: a) A função derivada é calculada pelo limite (4.1). Para todo $x \in \mathbb{R}$;

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0}(2x + h) = 2x.$$

Portanto, a função derivada de $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$, é a função $f'(x) = 2x$ que também esta definida em todo $x \in \mathbb{R}$; ou seja, a f é derivável em todo o domínio da função.

Exemplos

b) Nesse caso, $f(x) = x$, se $x \geq 0$, e $f(x) = -x$, se $x < 0$. Para todo

$x > 0$, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h) - x}{h} = 1$ e, para todo

$x < 0$, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-(x+h) - (-x)}{h} = -1$.

No ponto $x = 0$, os limites laterais são:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(0+h) - 0}{h} = 1 \quad \text{e}$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-(0+h) - (0)}{h} = -1.$$

Os valores são distintos. Concluímos, pela definição 4.1, que o limite não existe em $x = 0$ para a função do problema. Portanto, a função $f(x) = |x|$ não é derivável em $x = 0$. A função derivada da função $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, é a função $f'(x) = -1$, se $x < 0$, e $f'(x) = 1$, se $x > 0$. A função derivada, nesse caso, não está definida em $x = 0$.

Exemplos

c) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = c$ e, portanto, $f(x+h) = c$, também. Logo,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$$

Conhecida a função derivada de uma função f, pode-se calcular a derivada de f em qualquer ponto onde ela é derivável, através da função derivada. Como exemplo, no item a), a derivada de f em $x = x_0$ é $f'(x_0) = 2x_0$. O mesmo resultado pode ser obtido utilizando-se a relação (4.2).

Derivada

Teorema 4.1. Se uma função $f(x)$ é derivável num ponto x_0 do seu domínio então $f(x)$ é contínua em x_0, ou seja,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{4.3}$$

Observação: a partir do teorema 4.1, verificamos que se uma função é descontínua em um ponto, nesse ponto ela não é derivável. Portanto, a continuidade da função num determinado ponto é condição necessária para que ela seja derivável nesse ponto. Porém, esta não é uma condição suficiente. Uma função pode ser contínua mas não derivável num ponto. O exemplo clássico disso é a função módulo do exemplo 1b).

Exemplos

Exemplo 2. Considere a função $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in(-\infty,\ 1] \\ x+1, & x\in(1,\ \infty) \end{cases}$.

Resolução: Essa função é descontínua em $x=1$ e, portanto, não possui derivada nesse ponto.

Tarefa 1

Resolver os seguintes exercícios, digitalizar e enviar no moodle grupos.

2) Calcule $f'(x)$ pela definição:

a) $f(x) = x^2 + x \quad x = 1$

b) $f(x) = \sqrt{x} \quad x = 4$

Interpretação geométrica

A derivada de uma função num dado ponto, quando existe, tem um significado geométrico importante que é o discutido nesta seção.

Definição 4.2. Dada a função $f(x)$, o quociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{4.4}$$

onde $x \neq x_0$ é chamado de taxa de variação média da função $f(x)$ no intervalo determinado por x_0 e x.

Interpretação geométrica

Consideremos o gráfico de uma função $f(x)$ definida em $[a,b]$ onde é contínua. Vamos supor que f também é derivável em x_0. Veja a figura a seguir:

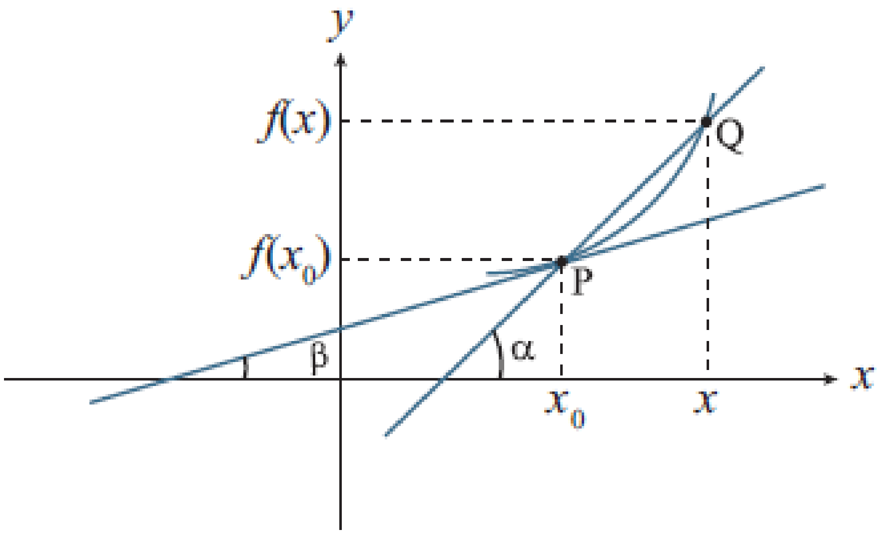

Figura 4.1

Interpretação geométrica

Observe que o quociente na definição (4.2) é igual a $\operatorname{tg}\alpha$, o coeficiente angular da reta secante passando nos pontos $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x, f(x))$, onde α é o ângulo de inclinação da reta. Tome o limite do quociente (4.4) quando $x \to x_0$. Este limite existe pois f é derivável em x_0. Observe que nesse limite a reta secante tende para a reta tangente ao gráfico da função $f(x)$, no ponto $P(x_0, f(x_0))$. Podemos concluir que a derivada de uma função $f(x)$ em um ponto x_0, quando existe, coincide com o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa x_0. Você saberia calcular a equação dessa reta? Não? Então, vejamos como se faz isso.

Interpretação geométrica

Observação: a equação de uma reta não vertical passando em um ponto (x_0, y_0) é

$$y - y_0 = a(x - x_0) \qquad (4.5)$$

onde a é o coeficiente angular da reta. Se $f(x)$ é uma função derivável em $x = x_0$ segue da interpretação geométrica da derivada que a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$ tem coeficiente angular $a = f'(x_0)$. Portanto, a equação da reta tangente é

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\,. \qquad (4.6)$$

Interpretação geométrica

Exemplo 3. Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$ no ponto (2, 4).

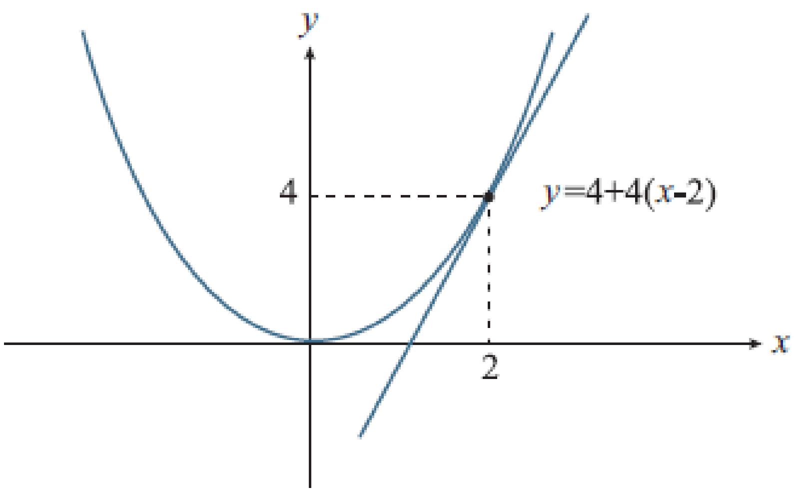

Figura 4.2

Resolução: Temos que

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}(x+2) = 4.$$

A equação da reta é $y - 4 = 4(x - 2)$.

Tarefa 2

Resolver os seguintes exercícios, digitalizar e enviar no moodle grupos.

1) Determine a equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto de abscissa indicada:

a) $f(x) = x^2 \quad x = 2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad x = 2$

Derivadas laterais

Definição 4.3. Dada a função $f(x): I \to \mathbb{R}$

i) a derivada à direita de $x_0 \in I$ é o número real indicado como $f'_+(x_0)$ e dado pelo limite lateral à direita

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (4.7),$$

quando este existir.

ii) a derivada à esquerda de $x_0 \in I$ é o número real indicado como $f_-'(x_0)$ dado pelo limite lateral à esquerda

$$f_-'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (4.8),$$

quando este existir.

Exemplos

Exemplo 4. Calcule as derivadas laterais da função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8, & x \le 3 \\ 4 - x, & 3 < x \le 6 \end{cases} \text{ nos pontos } x_0 = 3 \text{ e } 6.$$

Resolução: Temos que

$$f'_+(3) = \lim_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{4 - x - (3^2 - 8)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{3 - x}{x - 3}.$$

$$= \lim_{x \to 3^+} -1 = -1\,;$$

$$f_-'(3) = \lim_{x \to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{(x - 3)} = \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - 8 - 1}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3^-} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} (x + 3) = 6\,.$$

Como $f_+'(3) \neq f_-'(3)$, então f não é derivável em $x = 3$, isto é, não existe $f'(x)$. Em $x_0 = 6$, temos

$$f_-'(6) = \lim_{x \to 6^-} \frac{f(x) - f(6)}{(x - 6)} = \lim_{x \to 3^-} \frac{4 - x - (-2)}{x - 6}$$

$$= \lim_{x \to 3^-} \frac{6 - x}{x - 6} = -1\,.$$

Tarefa 3

Resolver os seguintes exercícios, digitalizar e enviar no moodle grupos.

9) Seja $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 2 \\ -x+6 & \text{se } x > 2 \end{cases}$. Verifique se f é derivável no ponto 2. Caso seja, calcule $f'(2)$.