Introdução à Análise - Verão 2021

Prof.: Ivan Pontual Costa e Silva— 4^a Lista de Exercícios

ALUNO(A):____________________

1) Uma *semi-métrica* (ou *pseudo-métrica*) em um conjunto M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ tal que

1) $d(x,x) = 0$, para todo $x \in M$,
2) $d(x,y) = d(y,x)$, para quaisquer $x, y \in M$,
3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, $\forall x, y, z \in M$.

Dada uma tal semi-métrica d em M,

a) Cheque que podemos definir as noções de bola aberta (ou fechada) e de topologia τ_d associada de forma idêntica à de um espaço métrico. No entanto, verifique que tal topologia é Hausdorff se e somente se d é uma métrica.

b) Defina em M a seguinte relação de equivalência: $x \sim y$ se $d(x,y) = 0$. Denote por $\overline{x}$ a classe de equivalência do elemento $x \in M$, e por M/d o conjunto das classes de equivalência. Defina $\overline{d} : M/d \times M/d \to \mathbb{R}_+$ pondo

$$\overline{d}(\overline{x}, \overline{y}) := d(x,y).$$

Prove que essa função está bem definida e que é uma métrica em M/d.

2) Sejam M, I conjuntos não-vazios. Seja $D = (d_i)_{i \in I}$ uma família de semi-métricas em M. Vamos delinear um método para construir uma topologia em M associada a essa família. Inicialmente defina, para cada $x \in M$, cada número $\epsilon > 0$ e cada subconjunto *finito não-vazio* $J \subset I$ a *vizinhança básica* de x

$$V_{J,\epsilon}(x) = \{y \in M \mid d_i(y,x) < \epsilon, \forall i \in J\}.$$

A partir daí, declaramos que um subconjunto $U \subseteq M$ é *aberto* se para cada $x \in U$, existirem um número $\epsilon > 0$ e um subconjunto finito não-vazio $J \subset I$ tais que $V_{J,\epsilon}(x) \subseteq U$.

a) Prove que a coleção τ_D de tais abertos é de fato uma topologia em M.

b) Prove que se $y \in V_{J,\epsilon}(x)$, então $V_{J,\epsilon - \max_{i \in J} d_i(y,x)}(y) \subset V_{J,\epsilon}(x)$. Conclua que cada vizinhança básica é um aberto de τ_D, e que cada aberto dessa topologia é uma união de tais vizinhanças básicas.

c) Seja (x_n) uma sequência em M, e $x_0 \in M$. Prove que $x_n \to x_0$ na topologia τ_D se, e somente se, $d_i(x_n, x_0) \to 0$ em $\mathbb{R}$ para cada $i \in I$.

d) A família D é dita ser *separante* se $\forall x, y \in M$,

$$d_i(x, y) = 0, \forall i \in I \Longrightarrow x = y.$$

Prove que τ_D é Hausdorff se e somente se D é separante.

e) Seja (N, d_N) um espaço métrico, e X um conjunto não-vazio. Seja $M = F(X, N) = \{f \mid f : X \to N\}$. Para cada $x \in X$, defina $d_x : M \times M \to \mathbb{R}_+$ pondo

$$d_x(f, g) = d_N(f(x), g(x)), \forall f, g \in M.$$

Prove que $D = (d_x)_{x \in X}$ é uma família separante de semi-métricas em M, e conclua que se (f_n) é uma sequência de elementos de M e $f \in M$, então $f_n \to f$ na topologia τ_D se e somente se $f_n(x) \to f(x)$ em (N, d_N) para cada $x \in X$.

3) Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Siga o roteiro para provar que I é conexo por absurdo.

a) Fixe uma cisão (A, B) de I, suponha que esta não seja trivial, e fixe $a \in A$ e $b \in B$. Sem perda de generalidade, podemos pôr $a < b$.

b) Prove que o conjunto

$$Z = \{t \in [a, +\infty) \, : \, [a, t] \subset A\}$$

é não-vazio, limitado superiormente, e que $c := \sup Z > a$.

c) Mostre que $c \in I \setminus A \cup B$, e que isto dá a contradição desejada.

4) Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos e $f : M \to N$ uma função contínua. Prove que se $C \subset M$ é conexo em M, então $f(C)$ é conexo em N. Use isto para provar o *teorema do valor intermediário*: se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, $a < b$ estão em I, $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua e $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

5) Faça os exercícios 3, 18, 22 e 23 do fim do Capítulo 4 do livro do Rudin.