Noção de Limite

Considere a função $f(x) = 2x - 3$. O que ocorre com os valores de $f(x)$, quando x assume valores próximos de 4?

Observe a tabela:

x	*3,8*	*3,9*	*3,99*		*4,01*	*4,1*	*4,2*
$f(x)$	*4,6*	*4,8*	*4,98*		*5,02*	*5,2*	*5,4*

Vemos nessa tabela que quanto mais próximo de 4 tomamos o ponto x, mais o valor $f(x)$ se aproxima de 5. Diremos que o limite de $f(x)$ quando x tende a 4 é 5.

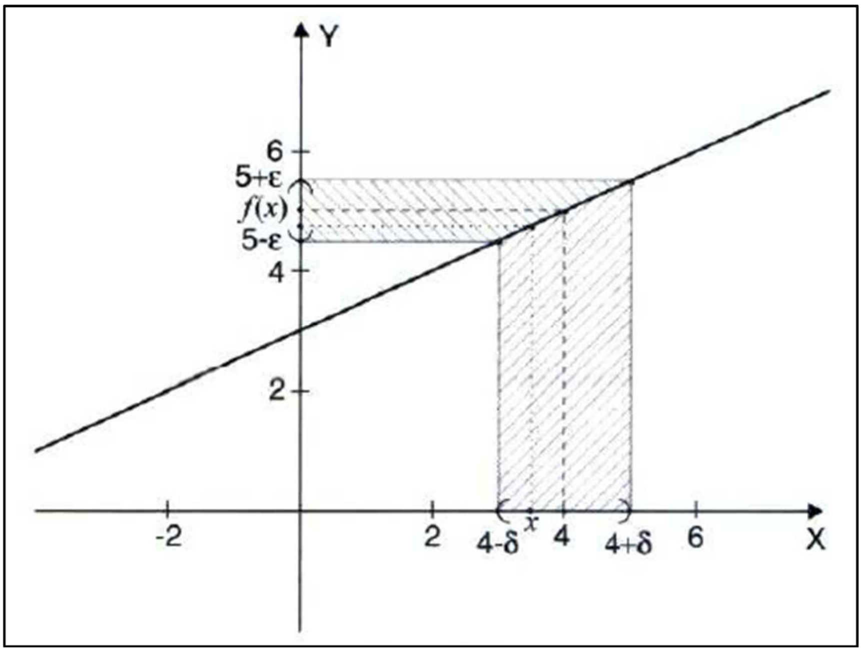
Podemos fazer com que $f(x)$ assuma valores tão próximos de 5 quanto desejarmos, desde que tomemos x suficientemente próximo de 4 ($x \neq 4$). Essa ideia pode ser traduzida matematicamente como

$$|f(x) - 5| < \varepsilon$$

Sendo um ε um número positivo qualquer, tão pequeno quanto se possa imaginar.

Além disso, deve existir um intervalo aberto de raio $\delta > 0$ e centro $a = 4$, tal que se x ($x \neq 4$) variar nesse intervalo (isto é, se $0 < |x - 4| < \delta$), então deve valer a desigualdade acima.

Observe o gráfico:



Definição. Seja I um intervalo qualquer, $a \in I$ e $f(x)$ uma função definida no intervalo I, (exceto eventualmente em a). Diz-se que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L , e escreve-se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ se para todo ε (epslon), $\varepsilon > 0$, existe um δ (delta), $\delta > 0$, tal que $|f\ (x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Teoremas sobre limites

Teorema 3.1. Unicidade do limite
Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} f(x) = M$ então $L = M$.

Teorema 3.2. Se $f(x) = k$ para todo x real, então para qualquer número real a, tem-se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} k = k$.

Exemplo. Considere $f(x) = 4$ e $a = 2$ então $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} 4 = 4$.

Ou seja, **o limite de uma constante é a própria constante.**

Teorema 3.3. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$ então:

a) $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L \pm M$..

b) Para qualquer número real k, tem-se
$\lim_{x\to a}(k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x\to a} f(x) = k \cdot L.$

c) $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L \cdot M.$

d) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ $se\ M \neq 0.$

e) $\lim_{x\to a}(f(x))^n = (\lim_{x\to a} f(x))^n = L^n.$

Teorema 3.4. Se $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim_{y\to b} g(y) = L$, com $L = g(b)$,

$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x))$.

Teorema 3.5 Sejam $b \in \mathbb{R},\ b \neq 1,\ b > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então:

a) $\lim_{x\to a}(\operatorname{sen} f(x)) = \operatorname{sen}(\lim_{x\to a} f(x)) = \operatorname{sen} L$.

b) $\lim_{x\to a}(\cos f(x)) = \cos(\lim_{x\to a} f(x)) = \cos L$.

c) $\lim_{x\to a} b^{f(x)} = b^{\lim_{x\to a} f(x)} = b^L$.

d) $\lim_{x \to a} (\log_b f(x)) = \log_b (\lim_{x \to a} f(x)) = \log_b L$, para $L > 0$.

e) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, para todo n se $L \geq 0$ e só para n ímpar se $L < 0$.

Primeira Observação: $\lim_{x \to a} x^n = a^n$.

Exemplo: $\lim_{x \to 2} x^3 = 2^3 = 8$.

Segunda Observação: Seja $p(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ um polinômio qualquer, pelo teorema 3.3 a, 3.3 b e pela "Primeira Observação", você tem:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} p(x) &= \lim_{x \to a} (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0) \\
&= \lim_{x \to a} b_n x^n + \lim_{x \to a} b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \lim_{x \to a} b_1 x + \lim_{x \to a} b_0 \\
&= b_n \lim_{x \to a} x^n + b_{n-1} \lim_{x \to a} x^{n-1} + \ldots + b_1 \lim_{x \to a} x + \lim_{x \to a} b_0 \\
&= p(a).
\end{aligned}$$

Logo, $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$.

Usando a segunda observação, calcular os limites abaixo.

1) $\lim_{x \to 2} (2x^2 - 7x + 4) = 2 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 4 = 2 \cdot 4 - 7 \cdot 2 + 4 = 18.$

2) $\lim_{x \to 1} (x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 2) = 1^5 - 3 \cdot 1^4 + 2 \cdot 1^3 + 2 = 1 - 3 + 2 + 2 = 2.$

Exemplos:

Exemplo 1. Calcular $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 7x - 2}{3x - 5}$

Exemplo 2. Calcular $\lim_{x \to 0} \left[(x-1)^{10} \cdot (x+5) \right]$.

Exemplo 3. Determinar $\lim_{x \to 1} \left[\log_{10}(x^2 - 2x + 101) \right]$.

Problemas:

Problema 1. Determinar $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{x \cdot \cos x}{x+1}$.

Problema 2. Calcular $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{x^2 \cdot \cos x}{x+2}$.

Exercícios Propostos:

1) Calcular $\lim\limits_{x \to 27} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-2}$.

2) Calcular $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^3-10x^2+8x+1}{x^2-5x-6}$.

3) Calcular $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\frac{x}{2} \cdot \operatorname{tg} x}{1+x}$.

4) Calcular $\lim\limits_{x \to 2} \left[\cos\,(x^2-5x+6)\right]$.

5) Calcular $\lim\limits_{x \to -1} 3^{(x^3+3x+2)}$.

Respostas:

1) $\dfrac{2}{25}$. 2) $\dfrac{7}{12}$. 3) $\dfrac{\pi}{2 \cdot (4+\pi)}$.

4) 1. 5) $\dfrac{1}{9}$.