Fatos e Exemplos sobre continuidade

Ivan P. Costa e Silva

Setembro, 2020

1 Continuidade em espaços métricos

Embora continuidade seja - como veremos - uma noção puramente topológica, usaremos inicialmente uma definição válida apenas para espaços métricos.

Definição 1 (Função contínua entre espaços métricos)**.** *Sejam* (M, d_M) *e* (N, d_N) *espaços métricos. Uma função* $f : X \subset M \to N$ *é* contínua *em* $x_0 \in X$ *se para todo real* $\varepsilon > 0$ *existir um real* $\delta > 0$ *tal que*

$$\forall x \in X,\, d_M(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d_M(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Se f *é contínua em todo* $x \in X$*, dizemos que é* contínua*.*

Exemplo 1. Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos, e $y_0 \in N$. Segue imediatamente da definição que a função contante de valor y_0

$$f_{y_0} : x \in M \mapsto y_0 \in N$$

é contínua.

Exemplo 2. Tome $(M, d_M) = (N, d_N) = (\mathbb{R}, d_{|\,.\,|})$, onde $|\,.\,|$ é a norma usual de $\mathbb{R}$. Uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in X$ de acordo com a Definição 1 se e somente se

$$\forall x \in X,\, |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Mas essa é precisamente a definição usual de continuidade de seu Cálculo 1! Portanto, *todas as funções reais de uma variável que você já sabia serem contínuas ou descontínuas são respectivos exemplos de acordo nossa definição.* Em particular, funções polinomiais, funções racionais, a função raiz quadrada, as funções trigonométricas e trigonométricas inversas, funções exponencial e logaritmo, todas são ainda funções contínuas para nós.

A definição 1 não apenas reproduz a definição usual de continuidade que é familiar quando $(M, d_M) = (N, d_N) = (\mathbb{R}, |\,.\,|)$, mas tem o mesmo significado heurístico: uma função f ser contínua em um ponto x_0 significa que podemos fazer os valores da função “tão próximos de $f(x_0)$ quanto queiramos fazendo x

suficientemente próximo de x_0", a noção de proximidade tornada pela precisa pelas funções distância.

Fica como exercício para o leitor verificar que se $(M, d_M), (N, d_N), (P, d_P)$ são espaços métricos, e $f : X \subset M \to N$ e $g : Y \subset N \to P$ são funções quaisquer com $f(X) \subset Y$ com f é contínua em $x_0 \in X$ e g contínua em $f(x_0)$, então $g \circ f$ é contínua em x_0. Em particular, composição de funções contínuas é contínua.

Proposição 1 (Propriedades aritméticas da continuidade)**.** *Sejam (M, d_M) um espaço métrico e $(E, \|\,.\,\|)$ um espaço vetorial normado. Sejam $f, g : X \subset M \to E$ e $h : X \subset M \to \mathbb{R}$ funções contínuas em um ponto $x_0 \in X$. Então:*

i) $f + g : x \in X \mapsto f(x) + g(x) \in E$ é contínua em x_0;

ii) $h \cdot f : x \in X \mapsto h(x) \cdot f(x) \in E$ é contínua em x_0.

Demonstração. Provaremos (ii), e a deixamos a prova (mais fácil) de (i) como exercício.

Inicialmente, note que podemos escrever, para todo $x \in X$,

$$\begin{aligned} \|h(x) \cdot f(x) - h(x_0) \cdot f(x_0)\| \quad &\leq \quad (h(x) - h(x_0)) \cdot (f(x) - f(x_0)) \\ &+ \quad h(x_0) \cdot (f(x) - f(x_0)) \\ &+ \quad (h(x) - h(x_0)) \cdot f(x_0). \end{aligned} \tag{1}$$

Seja $\varepsilon > 0$. Pela continuidade de h e f em x_0, existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} x \in X \text{ e } d_M(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad & |h(x) - h(x_0)| < \min\{1, \frac{\varepsilon}{3(\|f(x_0)\| + 1)}\}, \\ \text{e} \quad & \|f(x) - f(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{3(|h(x_0)| + 1)} \end{aligned} \tag{2}$$

Portanro, se $x \in X$ e $d_M(x, x_0)$, substituindo as desigualdades (2) na (1) nos dá que

$$\|h(x) \cdot f(x) - h(x_0) \cdot f(x_0)\| < \varepsilon.$$

□

A Definição 1 parece depender fortemente da métrica. Uma primeira indicação de que esse não é o caso vem do seguinte resultado crucial.

Proposição 2 (Caracterização sequencial de continuidade)**.** *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos, $f : X \subset M \to N$ uma função, e $x_0 \in X$. As seguintes afirmações são equivalentes.*

i) f é contínua em x_0.

ii) Para toda sequência $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \overset{d_M}{\to} x_0$, temos $f(x_n) \overset{d_N}{\to} f(x_0)$

Proof. $((i) \Rightarrow (ii))$
Suponha f contínua em x_0, e considere uma sequência $(x_n) \subset X$ tal que tenhamos $x_n \overset{d_M}{\to} x_0$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in X,\ d_M(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d_M(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Escolha então $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 \Rightarrow d_M(x_n, x_0) < \delta$. Mas então $d_N(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$, o que prova (ii).
$((ii) \Rightarrow (i))$
Assuma, por absurdo, que vale (ii), mas que f não é contínua em x_0. Então, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x_\delta \in X$ tal que $d_M(x_\delta, x_0) < \delta$, mas $d_N(f(x_\delta, f(x_0)) \geq \varepsilon_0$. Em particular, para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos escolher $x_n \in X$ tal que $d_M(x_n, x_0) < 1/n$, mas $d_N(f(x_n, f(x_0)) \geq \varepsilon_0$. Claramente $x_n \stackrel{d_M}{\to} x_0$, donde $f(x_n) \stackrel{d_N}{\to} f(x_0)$ de (ii). Mas então $d_N(f(x_\delta, f(x_0)) < \varepsilon_0$ para n grande o suficiente, uma contradição.

□

Corolário 1. *Sejam M, N conjuntos, $d_M, \hat{d}_M$ métricas topologicamente equivalentes em M, e $d_N, \tilde{d}_N$ métricas topologicamente equivalentes em N. Dada uma função $f : X \subset M \to N$, e $x_0 \in X$, f é contínua em x_0 com respeito a (M, d_M) e (N, d_N) se somente se o é com respeito a $(M, \hat{d}_M)$ e $(N, \tilde{d}_N)$*

Comentário com respeito à prova. Este resultado é quase imediato da Proposição 2 se lembramos que convergência de sequências só depende da topologia subjacente, e não da métrica específica que a define. Detalhes são com você.

□

Observação 1. Sejam E, F espaços vetoriais de dimensão finita. Desde que usemos normas para definir suas respectivas topologias, a afirmação de que uma função $f : X \subset E \to F$ é contínua (ou não) não depende de quais normas específicas usemos, já que vimos que quaisquer dois são equivalentes.

Exemplo 3. A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(0,0) = 0$ e

$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ não é contínua na origem. Para ver isso, basta notar que a sequência $(x_k, y_k) = (1/k, 0)$ converge para $(0,0)$ em $\mathbb{R}^2$, mas $f(x_k, y_k) = 1, \forall k \in \mathbb{N}$, e por isso converge a $1 \neq f(0,0)$. Poderíamos perguntar se seria possível dar a f outro valor $\neq 0$ na origem que a tornasse contínua aí; mas não, pois se o fizéssemos, poderíamos adotar a sequência $(x_k, y_k) = (0, 1/k)$ e a conclusão se manteria, já que $f(x_k, y_k) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$ nesse caso.

Exemplo 4. *Em um espaço métrico (M, d), a própria métrica $d : M \times M \times \mathbb{R}$ é uma função contínua (adotando-se a topologia-produto em $M \times M$ induzida pela topologia métrica que d induz em M).* Com efeito, seja $(x_0, y_0) \in M \times M$ e $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset M \times M$ uma sequência tal que $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ na topologia-produto. Sabemos que isso significa que $x_n \to x_0$ e $y_n \to y_0$ em (M, d). Agora, note que, usando a desigualdade triangular com cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) &\leq d(x_n, x_0) + d(x_0, y_0) + d(y_0, y_n) \\ &\Rightarrow d(x_n, y_n) - d(x_0, y_0) \leq d(x_n, x_0) + d(y_0, y_n) \end{aligned}$$

e

$$\begin{array}{rcl} d(x_0,y_0) & \le & d(x_n,x_0)+d(x_n,y_n)+d(y_0,y_n) \\ & \Rightarrow & d(x_0,y_0)-d(x_n,y_n) \le d(x_n,x_0)+d(y_0,y_n), \end{array}$$

donde concluímos que

$$|d(x_n,y_n)-d(x_0,y_0)| \le d(x_n,x_0)+d(y_0,y_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ou seja, que $d(x_n,y_n) \to d(x_0,y_0)$ em $\mathbb{R}$. O resultado agora segue da Prop. 2.

Exemplo 5 (Operações em um espaço vetorial)**.** Seja $(E, \|\,.\,\|)$ um espaço vetorial normado. Provaremos, usando a Prop.2, que suas operações de espaço vetorial:

$$(x,y) \in E\times E \mapsto x+y \in E \text{ e } (\lambda,x) \in \mathbb{R}\times E \mapsto \lambda\cdot x \in E$$

são funções contínuas (usando a topologia-produto nos produtos cartesianos)[1].

Com efeito, seja $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sequência em $E\times E$ convergindo (na topologia-produto) para $(x_0,y_0) \in E\times E$. Então $x_n \to x_0$ e $y_n \to y_0$ na norma. Mas note que

$$\|(x_n+y_n)-(x_0+y_0)\| = \|(x_n-x_0)+(y_n-y_0)\| \le \|x_n-x_0\|+\|y_n-y_0\| \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ou seja, $(x_n+y_n) \to (x_0+y_0)$ na norma.

Agora, seja $((\lambda_n,x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sequência em $\mathbb{R}\times E$ convergindo (na topologia-produto) para $(\lambda_0,x_0) \in \mathbb{R}\times E$. Então $\lambda_n \to \lambda_0$ em $\mathbb{R}$ e $x_n \to x_0$ na norma de E. Agora, temos

$$\begin{array}{rcl} \|\lambda_n\cdot x_n-\lambda_0\cdot x_0\| & = & \|\lambda_n\cdot x_n-\lambda_0\cdot x_n+\lambda_0(x_n-x_0)\| \\ & \le & |\lambda_n-\lambda_0|\|x_n\|+|\lambda_0|\|x_n-x_0\| \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \end{array}$$

pois $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada uma vez que (x_n) converge. Concluímos que $\lambda_n\cdot x_n \to \lambda_0\cdot x_0$ na norma.

2 Continuidade uniforme

Definição 2 (Continuidade uniforme)**.** *Sejam (M,d_M) e (N,d_N) espaços métricos. Uma função $f: X\subset M\to N$ é* uniformemente contínua *se para todo real $\varepsilon>0$ existir um real $\delta>0$ tal que*

$$\forall x,y\in X,\ d_M(x,y)<\delta \Longrightarrow d_M(f(x),f(y))<\varepsilon.$$

[1]Um *espaço vetorial topológico* é um espaço vetorial (real ou complexo) munido de uma topologia (usualmente assumida Hausdorff) com respeito à qual suas operações de espaço vetorial são contínuas. Há várias formas diferentes de dar uma tal topologia a um espaço vetorial, normas sendo apenas uma. *Entretanto, qualquer topologia desse tipo em um espaço vetorial de dimensão finita vem de uma norma, e portanto só há uma.* Eis outra forma em que a topologia usual de $\mathbb{R}^n$ é especial!

Note que o nome "uniforme" é adequado porque a característica fundamental da continuidade uniforme é que o $\delta > 0$ só depende de $\varepsilon > 0$, não dos pontos de X. Obviamente, qualquer função uniformemmente contínua é também contínua; o próximo exemplo mostra que a recíproca é falsa em geral.

Exemplo 6. A função quadrática $f : x \in\mapsto \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ é contínua mas não é uniformemente contínua. Com efeito, tome $\varepsilon = 1$. Dado qualquer $\delta > 0$, tome $x_\delta = \frac{1}{\delta}$ e $y_\delta = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$. Então $|x_\delta - y_\delta| = \delta/2 < \delta$, mas

$$|f(x_\delta) - f(y_\delta)| = |x_\delta^2 - y_\delta^2| = (\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2})\frac{\delta}{2} = 2 + \frac{\delta^2}{4} > 1.$$

Teorema 1. *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos, e $f : X \subset M \to N$ uma função tal que X é compacto. Se f é contínua, então f é uniformemente contínua.*

Demonstração. Suponha que f é contínua, mas não uniformenente contínua. Então, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, existem $x_n, y_n \in X$ tais que $d_M(x_n, y_n) < 1/n$, mas

$$d_N(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0. \tag{3}$$

Pela compacidade de X, podemos escolher subsequências convergentes $(x_{n_i}), (y_{n_i})$ em X, digamos com $x_{n_i} \overset{d_M}{\to} x_0$ e $y_{n_i} \overset{d_M}{\to} y_0$, com $x_0, y_0 \in X$.

Pelo Exemplo 4, por um lado $d_M(x_{n_i}, y_{n_i}) \to d_M(x_0, y_0)$; por outro, nossa escolha implica

$$d_M(x_{n_i}, y_{n_i}) < 1/n_i \to 0.$$

Pela unicidade do limite, $d_M(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow x_0 = y_0$.

Agora, como f é contínua, a caracterização da Prop. 2 nos permite concluir que,

$$f(x_{n_i}) \overset{d_N}{\to} f(x_0) \text{ e } f(y_{n_i}) \overset{d_N}{\to} f(y_0) = f(x_0).$$

Mas então, novamente pelo Exemplo 4, $d_N(f(x_{n_i}), f(y_{n_i})) \to d_N(f(x_0), f(x_0)) = 0$, enquanto que a Eq. (3) nos daria $0 = d_N(f(x_0), f(x_0)) \geq \varepsilon_0$, um absurdo.

□

O seguinte exemplo mostra que compacidade do domínio, embora suficiente para garantir continuidade uniforme se a função é contínua, não é necessária.

Exemplo 7. A função seno $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua. Com efeito, seja fixado $\varepsilon > 0$. Como tanto a função seno como a cosseno são contínuas em zero, existe $\delta < 0$ tal que

$$|z| < \delta \Rightarrow |\sin z| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } |\cos z - 1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mas então, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $|x - y| < \delta$, escreva

$$\sin x = \sin (x - y + y) = \sin (x - y) \cos y + \cos (x - y) \sin y,$$

donde

$$\begin{aligned}
|\sin x - \sin y| &= |\sin(x-y)\cos y + (\cos(x-y)-1)\sin y| \\
&\leq |\sin(x-y)||\cos y| + |\cos(x-y)-1||\sin y| \\
&\leq |\sin(x-y)| + |\cos(x-y)-1| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Exemplo 8 (Funções Lipschitz)**.** Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos. Uma função $f : X \subset M \to N$ é dita ser (de) *Lipschitz* se existe um número $K > 0$ tal que

$$d_N(f(x), f(y)) \leq K \cdot d_M(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Note que uma tal constante K, dita de Lipschitz, se existe, está longe de ser única: qualquer número maior servirá também. No entanto toda função Lipschitz é uniformemente contínua, pois dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \varepsilon/K$ na definição de continuidade uniforme.

Exemplo 9. A função $f : x \in [0,1] \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ é contínua, e sendo definida em um compacto, é também uniformemente contínua. Mas não é Lipschitz: dado qualquer $K > 0$, tome $y_K = 0$ e $x_k = 1/(K^2+1)$, donde

$$|f(x_K) - f(y_K)| = \frac{1}{\sqrt{x_K}}|x_K - y_K| > K\,|x_K - y_K|.$$

Exemplo 10. Seja $(E, \|\,.\,\|)$ um espaço normado. É um exercício simples usando a desigualdade triangular (faça!) mostrar que

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in E.$$

Ou seja, a própria norma $\|\,.\,\| : E \to \mathbb{R}$ é uma função Lipschitz na métrica que ela mesma define. Em particular, é uniformemente contínua, e portanto contínua na topologia que ela própria define.

Exemplo 11 (Funções distância de conjuntos)**.** Seja (M, d) um espaço métrico, e $A \subset M$ não-vazio. A *distância de um ponto $x \in M$ a A* é definida como

$$d(x, A) = \inf\{d(x, z) \,:\, z \in A\}.$$

Fica como exercício para o leitor provar que $d(x, A) = 0$ se e somente se $x \in \overline{A}$. Afirmamos que a *função distância de (ou a) A* $d_A : x \in M \mapsto d(x, A) \in \mathbb{R}$ é Lipschitz, e portanto uniformemente contínua. De fato, sejam $x, y \in M$. Para todo $z \in A$, temos

$$d(x, A) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \Rightarrow d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, z).$$

Ora, o lado esquerdo da última desigualdade não depende de z, e logo, tomando o ínfimo do lado direito, vem

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A).$$

Trocando os papéis de x e y nesta última desigualdade, concluímos que

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

Isto prova nossa afirmação.

As noções de continuidade, continuidade uniforme e Lipschitz, normalmente logicamente distintas como vimos, coincidem em uma subclasse muito importante de funções: as lineares.

Teorema 2 (Caracterização de continuidade para funções lineares)**.** *Sejam $(E, \|\,.\,\|_E)$ e $(F, \|\,.\,\|_F)$ espaços normados. Para uma aplicação linear $T : E \to F$, as seguintes afirmações são equivalentes.*

i) T é Lipschitz.

ii) T é uniformemente contínua.

iii) T é contínua.

iv) T é contínua em 0_E.

v) Existe um número $K > 0$ tal que, dado $x \in E$,

$$\|x\|_E \leq 1 \Rightarrow \|T(x)\|_F \leq K,$$

isto é, a restrição de T à bola fechada de E é limitada.

vi) Existe um número $K > 0$ tal que para todo $x \in E$, temos

$$\|T(x)\|_F \leq K\|x\|_E.$$

Demonstração. Claro que $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$. Da linearidade, também é fácil ver que $(vi) \Rightarrow (i)$, bastando provar as demais implicações.
$(iv) \Rightarrow (v)$.
Sendo T contínua em 0_E, para $\varepsilon = 1$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$x \in E, \|x\|_E < \delta \Rightarrow \|T(x)\|_F < 1.$$

Faça $K = 2/\delta$. Seja agora $x \in \overline{B}_1^E(0_E)$. Então

$$\|(\delta/2)\cdot x\|_E \leq \delta/2 \Rightarrow \|T((\delta/2)\cdot x)\|_F < 1 \overset{\text{T linear}}{\Longrightarrow} (\delta/2)\|T(x)\|_F < 1 \Rightarrow \|T(x)\|_F < K.$$

$(v) \Rightarrow (vi)$
Seja $K > 0$ como no item (v). Dado $x \in E \setminus \{0_E\}$, temos que $\frac{x}{\|x\|_E}$ está na bola fechada de E, já que tem norma 1. Portanto,

$$\|T(x/\|x\|_E)\|_F \leq K \Rightarrow \|T(x)\|_F \leq K\|x\|_E,$$

onde mais uma vez utilizamos a linearidade para este último passo. Claro que esta última desigualdade é automática para $x = 0_E$, concluindo a prova.

$\square$