Introdução à Análise - Verão 2021

Prof.: Ivan Pontual Costa e Silva— 3^a Lista de Exercícios

ALUNO(A):____

1) Sejam $(E, \|\,.\,\|_E)$ e $(F, \|\,.\,\|_F)$ espaços normados, $X \subset E$, $a \in X'$ (ponto de acumulação!) e $f : X \to F$ uma função. Lembre das listas anteriores que se $L \in F$,

$$\lim_{x \to a}^{\|\,.\,\|_E, \|\,.\,\|_F} f(x) = L$$

significa:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que } x \in X, 0 < \|x - a\|_E < \delta \Longrightarrow \|f(x) - L\|_F < \varepsilon.$$

Note que *a priori* essa definição depende das normas em E e F, fato que indicamos aqui pelo sobrescrito "$\|\,.\,\|_E, \|\,.\,\|_F$". Mas mostre que normas equivalentes dão "o mesmo resultado" no seguinte sentido: se $\|\,.\,\|_1$ e $\|\,.\,\|_2$ são normas em E e F, respectivamente equivalentes a $\|\,.\,\|_E$ e $\|\,.\,\|_F$, então

$$\lim_{x \to a}^{\|\,.\,\|_1, \|\,.\,\|_2} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to a}^{\|\,.\,\|_E, \|\,.\,\|_F} f(x) = L$$

Conclua, em particular, que para espaços normados em dimensão finita a noção de limite independe de qual norma usamos.

2) Mostre que em $\mathbb{R}$ com sua topologia usual, os conjuntos

a) $X = \{1/n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$,

b) $X = (0, 1)$,

não são compactos. Dizemos que um subconjunto de um espaço topológico é *precompacto* (ou *relativamente compacto*) se tem fecho compacto. Os conjuntos em (a) e (b) acima são precompactos?

3) Verdadeiro ou falso? Dados um espaço métrico (M, d), um compacto $K \subset M$, e $x_0 \in K$, o conjunto $K \setminus \{x_0\}$ não é compacto. Justifique sua resposta.

4) Sejam $(X_1, \tau_1), \ldots, (X_k, \tau_k)$ espaços topológicos, e defina a seguinte coleção $\mathcal{P}$ de subconjuntos de $X_1 \times \ldots \times X_k$: $W \in \mathcal{P}$ se e somente se

$$\forall (x_1, \ldots, x_k) \in W, \text{ existem } U_i \in \tau_i \ (i = 1, \ldots, k) \text{ tais que } (x_1, \ldots, x_k) \in U_1 \times \ldots \times U_k \subset W.$$

a) Prove que $\mathcal{P}$ é uma topologia em $X_1 \times \ldots \times X_k$, chamada a *topologia-produto*. (*Cuidado:* abertos dessa topologia não precisam ser produtos cartesianos de abertos nos X_i! Mas é claro que tais produtos cartesianos de abertos são abertos na topologia-produto, e são chamados *retângulos abertos*.)

b) Prove que uma sequência $(x_n^1, \ldots, x_n^k) \subset X_1 \times \ldots \times X_k$ converge para $(a_1, \ldots, a_k) \in X_1 \times \ldots \times X_k$ na topologia-produto se, e somente se, $x_n^i \to a_i$ em τ_i para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.

c) Adotando em $\mathbb{R}$ a topologia usual, mostre que bolas abertas em $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ (n vezes) de acordo com a norma do máximo são abertas na topologia-produto. Reciprocamente, mostre que todo aberto de $\mathbb{R}^n$ com a topologia-produto é aberto na topologia da norma. Conclua que a topologia usual em $\mathbb{R}^n$ é precisamente a topologia-produto de seus fatores $\mathbb{R}$.

5) Sejam $(M_1, d_1), \ldots, (M_k, d_k)$ espaços métricos, e para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, sejam $K_i \subset M_i$ compacto e $F_i \subset M_i$ fechado. Se $M_1 \times \ldots \times M_k$ é munido da topologia-produto, prove:

a) $F_1 \times \ldots \times F_k$ é fechado,

b) $K_1 \times \ldots \times K_k$ é compacto.

c) Dados $X_i \subset M_i$ quaisquer, mostre que

$$\overline{X_1 \times \ldots \times X_k} = \overline{X_1} \times \ldots \times \overline{X_k}$$

.

(*Sugestão*: use as caracterizações em termos de sequências de compactos e fechados válidas em espaços métricos e o Exercício 4.b.) Use esses resultados e o Exercício 4.c para dar duas provas diferentes do fato de que blocos $[a, b_1] \times \ldots \times [a_k, b_k]$ são compactos em $\mathbb{R}^k$.

6) Sejam $(M_1, d_1), \ldots, (M_k, d_k)$ espaços métricos, e

$$d : (M_1 \times \ldots \times M_k) \times (M_1 \times \ldots \times M_k) \to \mathbb{R}_+$$

dada por

$$d((x_1, \ldots, x_k), (y_1, \ldots, y_k)) = \sum_{i=1}^{k} d_i(x_i, y_i),$$

$$\forall (x_1, \ldots, x_k), (y_1, \ldots, y_k) \in (M_1 \times \ldots \times M_k) \times (M_1 \times \ldots \times M_k).$$

Prove que d é uma métrica em $M_1 \times \ldots \times M_k$. Prove em seguida que a topologia métrica correspondente é precisamente a topologia-produto em $M_1 \times \ldots \times M_k$ (*Sugestão:* faça primeiro o caso $k = 2$ e generalize depois).

7) Sejam $(E_1, \| . \|_1), \ldots (E_n, \| . \|_n)$ espaços normados. Considere as funções

$\|\,.\,\|_i : E_1 \times \cdots \times E_n \to \mathbb{R}$ $(i = E, S, M)$ dadas por

$$\begin{aligned} \|(x_1, \ldots, x_n)\|_E &= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_k^2}, \qquad (1) \\ \|(x_1, \ldots, x_n)\|_S &= \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_k, \\ \|(x_1, \ldots, x_n)\|_M &= \max_{1 \leq k \leq n}\{\|x_k\|_k\}. \end{aligned}$$

a) Mostre que essas funções definem normas duas a duas equivalentes em $E_1 \times \cdots \times E_n$. Aqui, a estrutura de espaço vetorial em $E_1 \times \cdots \times E_n$ é dada por

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots \lambda x_n).$$

(Esse espaço vetorial é às vezes chamado *soma direta* de $E_1, \ldots E_n$, e denotado $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$.)

b) Prove que a topologia que elas definem é a topologia-produto em $E_1 \times \cdots \times E_n$.

c) Prove que se $(E_1, \|\,.\|_1), \ldots (E_n, \|\,.\|_n)$ são espaços de Banach (isto é, completos na topologia da norma), então $E_1 \times \cdots \times E_n$ é espaço de Banach quando munido de qualquer uma das normas acima.

8) Um espaço topológico (X, τ) é dito ser *localmente compacto* se para cada $x \in X$ existir um compacto $K \subset X$ tal que $x \in \operatorname{int} K$ (i.e., x é ponto interior de K). (Note, em particular, que todo espaço topológico compacto é localmente compacto.) Prove que todo espaço vetorial normado de dimensão finita (com a topologia da norma) é localmente compacto. Mostre que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, munido da topologia induzida pela usual de $\mathbb{R}$, *não* é localmente compacto.