Introdução à Análise - Verão 2021

Prof.: Ivan Pontual Costa e Silva— Lista Complementar de Exercícios - Espaços Métricos

ALUNO(A):________________________________________

**1)** Seja $(M, d)$ um espaço métrico, e seja $X \subseteq M$. Nos casos abaixo, faça o que se pede.

a) Suponha $M = \mathbb{R}$, $d$ a métrica usual. Para $X = [0, 1)$, mostre que $int\, X = (0, 1)$, e $\partial X = \{0, 1\}$.

b) Para $(M, d)$ como no item anterior, tome $X = \mathbb{Q}$. Mostre que $int\, X = \emptyset$.

c) Para $(M, d)$ como no item anterior, tome $X = [0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Mostre que $int\, X = \emptyset$, e $\partial X = [0, 1]$.

d) Tome $M$ não-vazio arbitrário, $d = d_{01}$, e $X = B_r(x_0)$ para $x_0 \in M$, $r > 0$. Obtenha $int\, X$ e $\partial X$ no caso em que $r \leq 1$ e no caso em que $r < 1$.

e) Suponha $M = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, com $d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in M$. Seja $X = B_1(0) = \overline{B}_1(0)$ (note que neste exemplo, a bola fechada é um aberto!). Obtenha $\partial X$.

f) Suponha que $M$ é um espaço vetorial e que $d$ vem de uma norma $\| \, . \, \|$ em $M$. Prove que para todo $r > 0$, e todo $x_0 \in M$,

$$\partial B_r(x_0) = S_r(x_0) = \partial S_r(x_0).$$

g) Tome $M = [0, 1]$, com $d$ a métrica induzida pela métrica usual em $\mathbb{R}$. Prove que $[0, 1)$ é aberto em $(M, d)$.

**2)** Seja $(S, \tau)$ um espaço topológico, e fixe $X \subseteq S$. Considere a coleção $\tau_X$ de todos os subconjuntos $Y$ de $X$ que são da forma $Y = A \cap X$ para algum aberto $A \in \tau$. Prove que $\tau_X$ é uma topologia em $X$. Esta é a chamada *topologia induzida (em $X$ por $\tau$)*, e seus elementos são chamados de *abertos em $X$*.

**3)** Seja $(M, d)$ um espaç métrico, e seja $A \subseteq M$. Denote por $d_A$ a métrica induzida em $A$ por $d$.

a) Verifique que para quaisquer $a \in A$ e $r > 0$, $B_r^{d_A}(a) = B_r^d(a) \cap A$.

b) Prove que $X \subseteq A$ é aberto em $A$ (ou seja, é aberto na topologia induzida por $\tau_d$) se e somente se para todo $x \in X$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon^d(x) \cap A \subseteq X$. Use isto e o item $(a)$ para provar que a topologia métrica definida em $A$ pela restrição $d|_{A \times A}$ (isto é pela métrica induzida em $A$) é precisamente a topologia induzida por $\tau_d$ em $A$.

c) Seja $M = \mathbb{R}$, $d$ a métrica usual e $A = [0, 1] \cup \{2\}$. Prove que $[0, 1]$, $(0, 1]$ e $\{2\}$ são abertos em $X$.

d) Seja $M = \mathbb{R}$, $d$ a métrica usual e $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Mostre que o unitário $\{x\}$ de cada ponto $x \in A$ é aberto em $A$, exceto $x = 0$.

e) Um ponto $a \in M$ é dito *ponto de acumulação* de $A$ se para todo $\epsilon > 0$, $(B_\epsilon^d(a) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$. Denotando por $A'$ o conjunto dos pontos de acumulação de $A$, prove que $\overline{A} = A \cup A'$.

f) Sejam $a \in A'$, $(N, d')$ um espaço métrico qualquer, e $f : A \to N$ uma função. Dizemos que $L \in N$ é o *limite de* $f(x)$ *quando* $x$ *tende a* $a$, e denotamos por $\lim_{x\to a} f(x) = L$, se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A \text{ e } 0 < d(x, a) < \delta \to d'(f(x), L) < \epsilon.$$

Explique por que, neste definição, precisamos que $a$ seja um ponto de acumulação.