Análise I

Prof.: Ivan Pontual Costa e Silva— Lista Preliminar de Exercícios

ALUNO(A):____

1) Sendo A, B, C conjuntos quaisquer, prove que

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

b) $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$;

c) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$;

d) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

2) Fixe um conjunto E. Para cada subconjunto $X \subset E$, chamaremos de *complementar de X (em E)* o conjunto $X^c := E \setminus X$. Dados A, B subconjuntos de E, prove que:

a) $(A^c)^c = A$;

b) $A^c \subset B^c$ se e somente se $B \subset A$;

c) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;

d) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;

e) $A = \emptyset \Leftrightarrow A^c = E$.

3) Determine se cada uma das relações abaixo é uma função, justificando sua resposta. Em caso afirmativo, verifique se a função é injetora e/ou sobrejetora.

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$.

b) $\{(x, y) \in [-1, 1] \times \mathbb{R} \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$.

c) $\{(x, y) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}_+ \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$.

d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \ : \ x = y^2\}$.

e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \ : \ x = y^2\}$.

4) Seja X um conjunto. Uma relação $R \subseteq X \times X$ em X é dita ser uma *relação de ordem (parcial)* se é *reflexiva, antissimétrica e transitiva*, isto é, se satisfaz as seguintes condições:

i) $(x,x) \in R$, para todo $x \in X$;

ii) Se $(x,y) \in R$ e $(y,x) \in R$, então $x = y$;

iii) Se $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R$, então $(x,z) \in R$.

Uma relação de ordem é dita *total* se além de satisfazer $(i) - (iii)$ também satisfaz:

iv) Para quaisquer $x, y \in X$, ou $(x,y) \in R$ ou $(y,x) \in R$.

Um conjunto munido de uma relação de ordem (parcial) é dito ser um *conjunto (parcialmente) ordenado.* Se a relação de ordem é total, dizemos que o conjunto em questão é *totalmente ordenado.*

Seja agora E um conjunto, e escolha $X := \mathbb{P}(E)$, isto é, X é o conjunto das partes de E, ou conjunto de todos os subconjuntos de E. Defina

$$R := \{(A,B) \in X \times X \ : \ A \subseteq B\}.$$

Mostre que nesse caso, R é uma relação de ordem parcial em X. Escolha um E conveniente, para verificar que essa relação, em geral, não precisa ser total. Isto é, com essa relação de ordem, X não precisa ser totalmente ordenado.

Mas agora escolha $X = \mathbb{R}$ e

$$R := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ : \ y - x \in \mathbb{R}_+\}.$$

Mostre que R é uma relação de ordem total em $\mathbb{R}$.

5) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as funções dadas por $f(x) = x^2 + 4x - 5$ e $g(x) = 2x - 3$.

a) Obtenha as funções $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$ e $g \circ f$ (domínio, contradomínio e regra).

b) Determine $(f \circ g)(2)$ e $(g \circ g)(-2)$.

6) Para as funções da forma $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas abaixo, determine:

a) Os maiores domínios I e J onde f e g poderiam estar definidas se suas regras são dadas por $f(x) = \sqrt{x-1}$ e $g(x) = 2x^2 - 5x + 3$.

b) Os maiores domínios I e J onde as f e g do item anterior poderiam estar definidas para que $f \circ g$ esteja bem definida.

c) Os maiores domínios I e J onde as f e g do item (a) poderiam estar definidas para que $g \circ f$ esteja bem definida.

d) Refazer os itens de (a) a (c) supondo que $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ e $g(x) = 2x + 3$.

7) Determine o valor de b em $B = \{y \in \mathbb{R} \;:\; y \geq b\}$ para que a função $f : \mathbb{R} \to B$ dada por $f(x) = x^2 - 4x + 6$ seja sobrejetora.

8) Determine o maior valor de a em $A = \{x \in \mathbb{R} \;:\; x \leq a\}$ para o qual a função $f : A \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ seja injetora.

9) Fazer TODOS os exercícios do Capítulo 1 do livro "Curso de Análise - vol. 1" de Elon L. Lima.