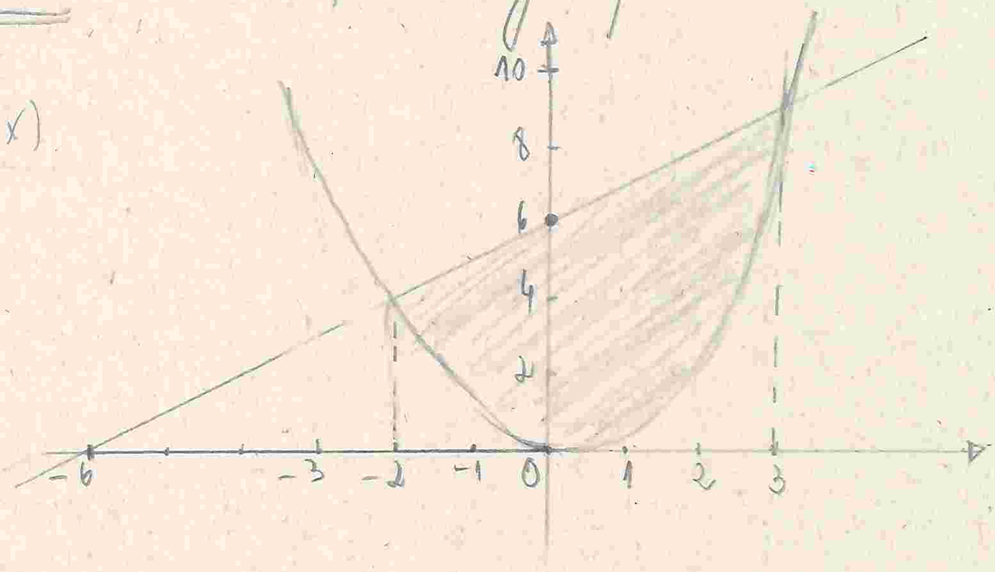
Cálculo de Áreas

15) $y = f(x) = x + 6$ e $y = g(x) = x^2$. $A = ?$

1º Passo: Esboçar o gráfico:

x	f(x)
0	6
−6	0



x	g(x)
−1	1
0	0
1	1

2º Passo: Encontrar os limites de integração.
Para isso, igualamos f(x) à g(x) e encontramos as raízes da equação resultante:

$$f(x) = g(x)$$
$$x + 6 = x^2$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$

Por Báskara: $x = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2}$

$x_1 = -2$; $x_2 = 3$

→ **Obs**: Para todo $x \in [-2, 3]$ $f(x) \geq g(x)$

3º Passo: Calcular a área limitada por $y = f(x) = x + 6$ e $y = g(x) = x^2$ em $[-2, 3]$:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

$$A = \int_{-2}^{3} [(x+6) - x^2]\, dx = \int_{-2}^{3} (x + 6 - x^2)\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^{3} .$$ Pelo TFC, temos:

$$= \left(\frac{3^2}{2} + 6.3 - \frac{3^3}{3}\right) - \left(\frac{(-2)^2}{2} + 6.(-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{9}{2} + 18 - 9\right) - \left(\frac{4}{2} - 12 + \frac{8}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{9}{2} + 9\right) - \left(-10 + \frac{8}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{9 + 18}{2}\right) - \left(\frac{-30 + 8}{3}\right)$$

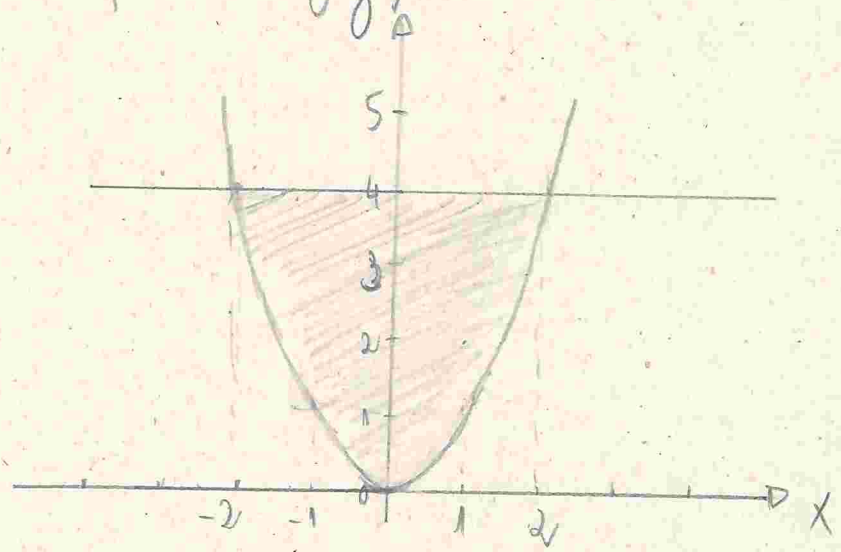
$$= \frac{27}{2} - \left(-\frac{22}{3}\right) = \frac{27}{2} + \frac{22}{3}$$

$$= \frac{81 + 44}{6} = \frac{125}{6} \text{ u.a}$$

16 $y = f(x) = 4$ e $y = g(x) = x^2$. $A = ?$

1º Passo: Esboçar o gráfico:

x	$g(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4



2º Passo: Encontrar os limites de integração, igualando $f(x) = g(x)$

$$f(x) = g(x)$$
$$4 = x^2$$
$$x = \pm\sqrt{4}$$
$$x = \pm 2$$

Assim $a = -2$ e $b = 2$

$x \in [-2, 2]$

3º Passo: A área será:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx$$

$$= 4x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} \longrightarrow$$

Pelo TFC:

$$A = \left(4.2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(4.(-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right)$$

$$A = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 - \frac{(-8)}{3}\right)$$

$$A = \left(\frac{24 - 8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right)$$

$$A = \frac{16}{3} - \left(\frac{-24 + 8}{3}\right)$$

$$A = \frac{16}{3} - \left(-\frac{16}{3}\right)$$

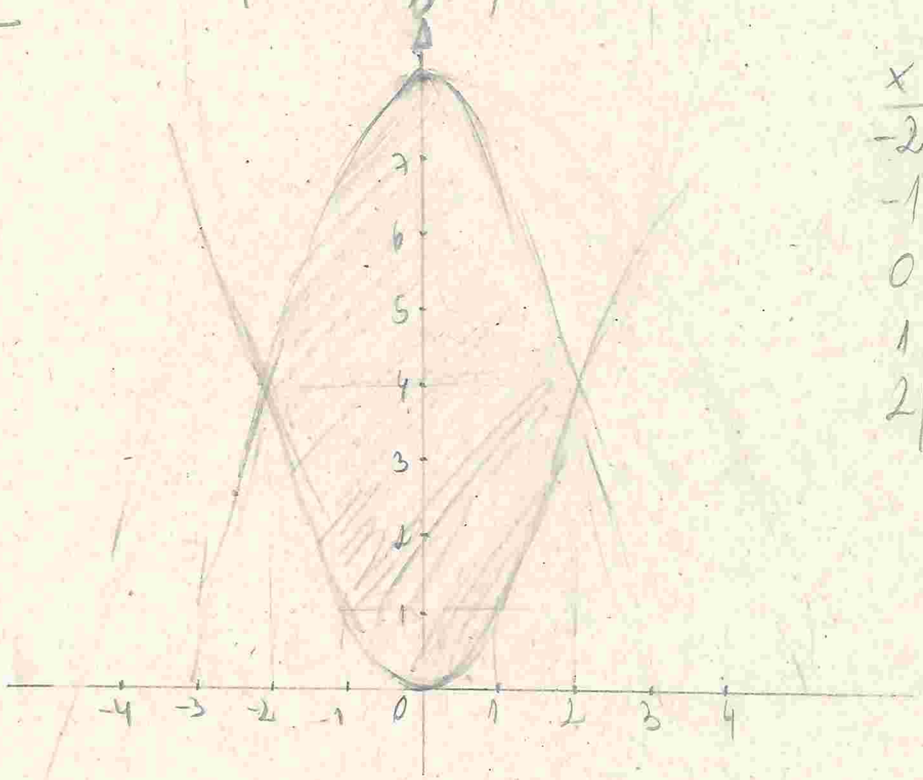
$$A = \frac{16}{3} + \frac{16}{3} =$$

$$A = \frac{32}{3} \text{ u.a.}$$

17) $y = f(x) = 8 - x^2$ e $y = g(x) = x^2$. $A = ?$

1º Passo: Esboçar o gráfico.

x	$f(x)$
0	8
1	7
2	4



x	$g(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

2º Passo: Para encontrar os limites de integração, fazemos $f(x) = g(x)$. Assim:

$$8 - x^2 = x^2$$
$$8 = x^2 + x^2$$
$$8 = 2x^2$$
$$\frac{8}{2} = x^2$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm\sqrt{4}$$
$$\boxed{x = \pm 2}$$

Assim, os limites de integração são as raízes da equação encontrada, ou seja, $a = -2$ e $b = 2$.

Passo 3: a área será:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} (8 - x^2 - x^2)\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)\, dx$$

$$= 8x - \frac{2x^3}{3} \Big|_{-2}^{2}$$ Pelo TFC:

$$A = \left(8.2 - \frac{2.2^3}{3}\right) - \left(8.(-2) - \frac{2.(-2)^3}{3}\right) //$$

$$= \left(16 - \frac{2^4}{3}\right) - \left(-16 - \frac{2.(-8)}{3}\right)$$

$$= \left(16 - \frac{16}{3}\right) - \left(-16 + \frac{16}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{48 - 16}{3}\right) - \left(\frac{-48 + 16}{3}\right)$$

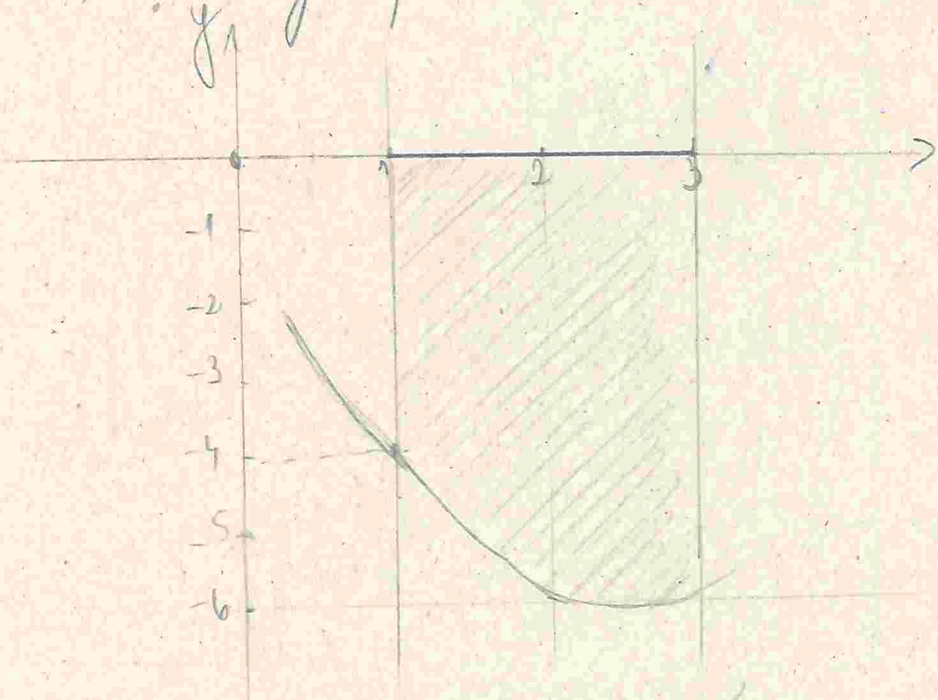
$$= \frac{32}{3} - \left(-\frac{32}{3}\right) = \frac{64}{3} //$$

(18) $y = f(x) = x^2 - 5x$; x e as retas $x = 1$ e $x = 3$. $A = ?$

$1 - 5 = -4$ $4 - 10 = -6$ $9 - 15 = -6$

1º Passo: Esboço do gráfico:

x	$f(x)$
0	0
1	-4
2	-6
3	-6



2º Passo: Os limites de integração são $a = 1$ e $b = 3$.

3º Passo: A área limitada pela curva $y = f(x) = x^2 - 5x$ e o eixo x e as retas $x = 1$ e $x = 3$ será:

$$A = \left| \int_1^3 (x^2 - 5x)\, dx \right| =$$

$$= \left| \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} \right) \Big|_1^3 \right| =$$

Pelo T.F.C:

$$= \left| \left(\frac{3^3}{3} - \frac{5 \cdot 3^2}{2} \right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{5 \cdot 1^2}{2} \right) \right|$$

$$= \left| \left(\frac{27}{3} - \frac{45}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} \right) \right|$$

$$= \left| \left(9 - \frac{45}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} \right) \right|$$

$$= \left| \left(\frac{18 - 45}{2} \right) - \left(\frac{2 - 15}{6} \right) \right|$$

$$= \left| -\frac{27}{2} - \left(-\frac{13}{6} \right) \right|$$

$$= \left| -\frac{27}{2} + \frac{13}{6} \right|$$

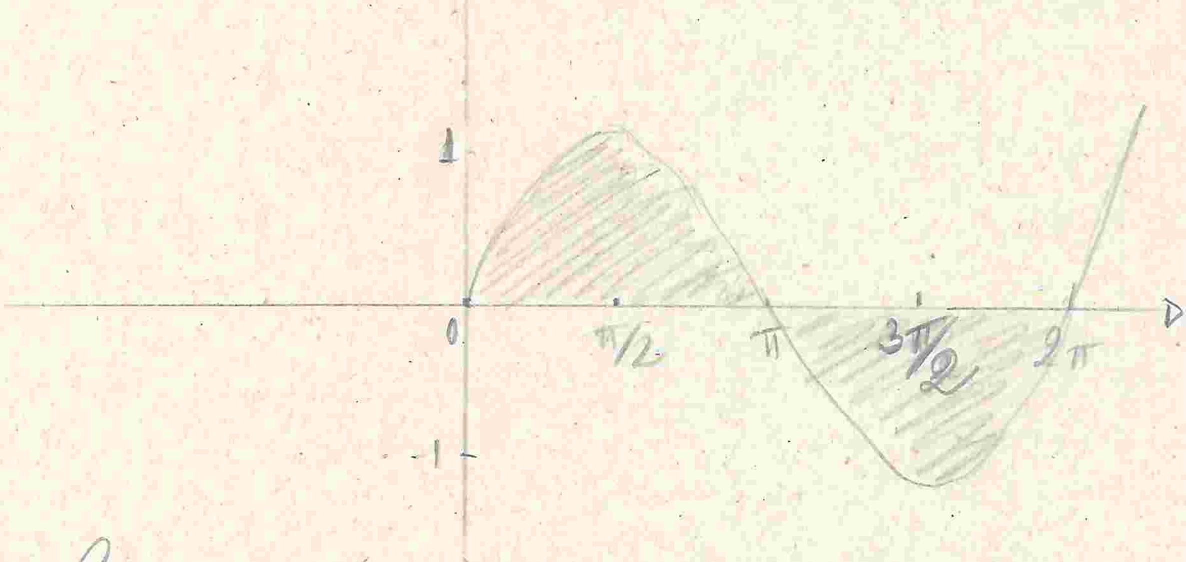
$$= \left| \frac{-81 + 13}{6} \right| =$$

$$= \left| -\frac{68}{6} \right| = \left| -\frac{34}{3} \right|$$

$$= \frac{34}{3} \text{ u.a.}$$

(19) $y = f(x) = \text{sen}\, x$, eixo x de 0 a 2π.

1º Passo: Esboçar o gráfico:



2º Passo: Para determinar os limites de integração temos, pelo gráfico, que de $[0, \pi]$ $\text{sen}\, x \geq 0$ e no intervalo de $[\pi, 2\pi]$ $\text{sen}\, x \leq 0$.

3º Passo: A área será:

$$A = \int_0^{\pi} \text{sen}\, x \, dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen}\, x \, dx \right|$$

$$= -\cos x \Big|_0^{\pi} + \left| (-\cos x) \Big|_{\pi}^{2\pi} \right|$$ Pelo TFC:

$$= -\cos \pi - (-\cos 0) + |(-\cos 2\pi) - (-\cos \pi)|$$

$$= -\cos \pi + \cos 0 + |-\cos 2\pi + \cos \pi|$$

$$= -(-1) + 1 + |-1 + (-1)|$$

$$= +1 + 1 + |-2| = 2 + 2 = 4 \text{ u.a.}$$

(19)

e) $y = f(x) = x^3$, $y = g(x) = -2x + 4$ e as retas $x = 0$ e $x = 1$. $A = ?$

1º Passo: Esboço do gráfico.

x	$f(x)$
0	0
1	1
2	8

x	$g(x)$
0	4
1	2
2	0

A curva $y = x^3$ e a reta $y = -2x + 4$ não se interceptam no intervalo $[0, 1]$ pois $x^3 \leq 1$ e $-2x + 4 \geq 2$ para todo $x \in [0, 1]$. Assim temos $-2x + 4 > x^3$ para todo $x \in [0, 1]$ e a área desejada é dada por:

$$\left| \int_0^1 [x^3 - (-2x+4)]\, dx \right| = \left| \int_0^1 (x^3 + 2x - 4)\, dx \right|$$

$$= \left| \left(\frac{x^4}{4} + \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} - 4x \right) \Big|_0^1 \right| \text{. Pelo TFC:}$$

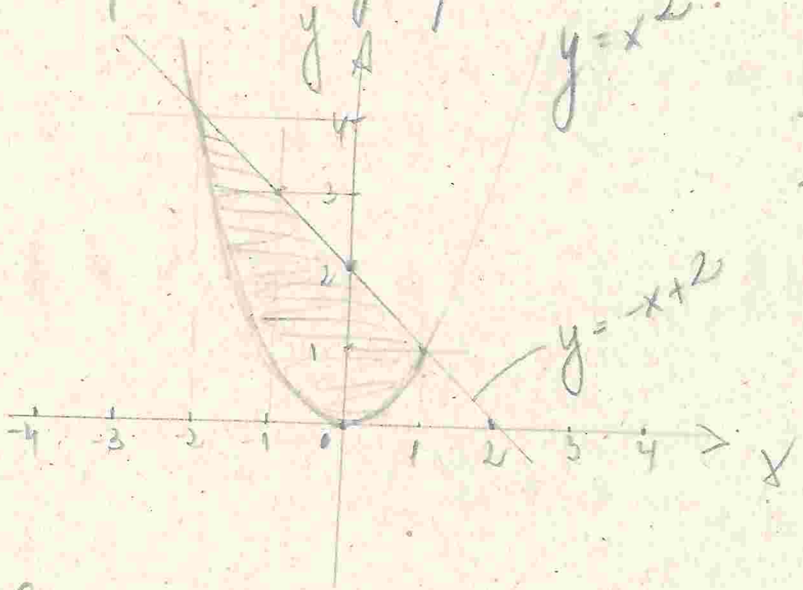
$$= \left| \left(\frac{1}{4} + 1^2 - 4.1 \right) - \left(\frac{0^4}{4} + 0 - 0 \right) \right|$$

$$= \left| \frac{1 + 4 - 16}{4} \right| = \left| -\frac{11}{4} \right| = \frac{11}{4} \text{ u.a.}$$

(21) $y = f(x) = -x+2 \quad , \quad y = g(x) = x^2$

1º Passo: Esboçar o gráfico:

x	$f(x)$
-2	4
-1	3
0	2
1	1
2	0



x	$g(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

2º Passo: Encontrar os limites igualando $f(x)$ a $g(x)$ e achando as raízes:

$-x+2 = x^2$

$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-2)}}{2.1}$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} \rightarrow -2 \\ \rightarrow 1 \end{cases}$

3º Passo: Encontrar a área:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_{-2}^{1} [(-x+2) - x^2]\,dx$$

$$= \int_{-2}^{1} [-x+2-x^2] = -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^{1}$$

Pelo TFC:

$$= \left(-\frac{1^2}{2} + 2\cdot 1 - \frac{1^3}{3}\right) - \left(-\frac{(-2)^2}{2} + 2.(-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{4}{2} - 4 - \frac{(-8)}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{-3+12-2}{6}\right) - \left(-2 - 4 + \frac{8}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{7}{6}\right) - \left(-6 + \frac{8}{3}\right) = \frac{7}{6} - \left(\frac{-18+8}{3}\right)$$

$$= \frac{7}{6} - \left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{7}{6} + \frac{10}{3}$$

$$= \frac{7+20}{6} = \frac{27^{:3}}{6_{:3}} = \frac{9}{2} \text{ u.a.}$$

22