Lista I

① $\int_0^2 x\,dx$

Sabemos que $F(x) = \frac{x^2}{2}$ é uma primitiva da funçao $f(x)$, pois $F'(x) = 2 \cdot \frac{x}{2} = x = f(x)$.

Logo, pelo TFC, temos:

$$\int_0^2 x\,dx = F(x)\Big|_0^2 = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = F(2) - F(0)$$

$$= \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{4}{2} - \frac{0}{2} = 2 - 0 = 2 \,/\!/$$

② $\int_1^3 (x^2+4)\,dx$

Temos que $F(x) = \frac{x^3}{3} + 4x$ como primitiva da $f(x) = x^2 + 4$, pois

$$F'(x) = \frac{3 \cdot x^2}{3} + 4 \cdot 1 = x^2 + 4 = f(x)$$

Logo, pelo TFC, temos:

$$\int_1^3 (x^2+4)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + 4x\right)\Big|_1^3 = F(3) - F(1)$$

$$= \left(\frac{3^3}{3} + 4 \cdot 3\right) - \left(\frac{1^3}{3} + 4 \cdot 1\right) = (9 + 12) - \left(\frac{1}{3} + 4\right)$$

$$= 21 - \frac{13}{3} = \frac{63 - 13}{3} = \frac{50}{3} \;//$$

Obs.: Usando as propriedades 1 e 2 e o TFC, o resultado será o mesmo, de fato,

$$\int_1^3 (x^2+4)\,dx = \int_1^3 x^2\,dx + \int_1^3 4\,dx = \int_1^3 x^2\,dx + 4\int_1^3 dx$$

---

3) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx.$

Sabemos que $F(x) = \sqrt{x}$ é uma primitiva de $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, pois $F'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = f(x)$.

Logo, pelo TFC, temos:

$$\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x}\,\Big|_1^4 = F(4) - F(1)$$

$$= \sqrt{4} - \sqrt{1} = 2 - 1 = 1 \;//$$

(4) $\int_0^4 f(x)dx$, onde $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 2x, & \text{se } 2 < x \leq 4. \end{cases}$

Pela propriedade 3, temos:

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx$$

Como $f(x) = x^2$ para $0 \leq x \leq 2$ e $f(x) = 2x$ p/ $2 < x \leq 4$, temos:

$$\int_0^2 x^2\,dx + \int_2^4 2x\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 + \left.\cancel{2}\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}}\right|_2^4$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) + \left(4^2 - 2^2\right)$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 0\right) + (16 - 4) = \frac{8}{3} + 12$$

$$= \frac{8 + 36}{3} = \frac{44}{3}$$

⑤ $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

Uma primitiva da função $f(x)$ é $F(x)=\sqrt{x^2+1}$, pois $F'(x) = \cancel{2}x \cdot \frac{1}{\cancel{2}}(x^2+1)^{-1/2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Logo, pelo TFC, temos:

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{x^2+1}\Big|_0^2 = \sqrt{2^2+1} - \sqrt{0^2+1}$$

$$= \sqrt{5} - \sqrt{1} = \sqrt{5} - 1$$

⑥ $\int_0^1 e^x\,dx$ = A primitiva da $f(x)$ é $F(x)=e^x$, pois $F'(x) = e^x$. Assim, pelo TFC:

$$\int_0^1 e^x\,dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

⑦ $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ Para escrever uma primitiva de $\frac{1}{x}$, observemos que com $x \in [1,2]$ temos $x > 0$, ou seja $|x| = x$. Logo, $\ln x$ é uma primitiva de $\frac{1}{x}$ e o TFC fornece:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{0} = \ln 2$$

(8) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx$

O TFC fornece:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi}$$

$$= -(\cos \pi - \cos 0)$$

$$= -(-1 - 1) = -(-2) = 2$$

(9) $\int_0^{\pi} \cos x \, dx =$

Pelo TFC, temos:

$$\int_0^{\pi} \cos x \, dx = \operatorname{sen} x \Big|_0^{\pi}$$

$$= \operatorname{sen} \pi - \operatorname{sen} 0 = 0 - 0 = 0$$

Obs: Para encontrarmos a área da curva, fazemos:

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \, dx$$