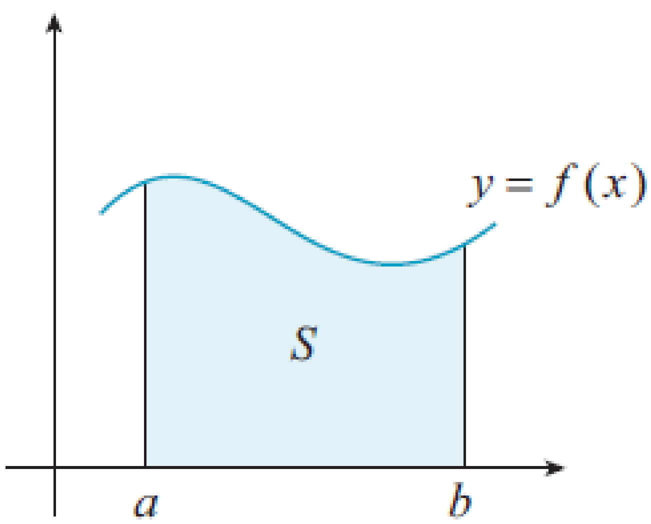
Introdução à Integral

Cálculo de Áreas

Cálculo de Áreas

Vimos anteriormente que, se $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x\in[a,b]$, a área da região plana S limitada pelas retas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$, e pelo gráfico de f é definida por

$$\acute{A}rea\ S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

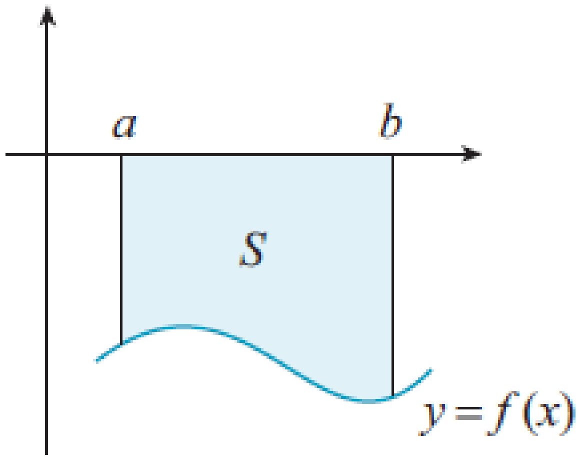


Cálculo de Áreas

Podemos estender o cálculo de área para uma classe mais ampla de regiões planas. Vamos assumir que as funções envolvidas são funções contínuas em $[a,b]$. Vejamos:

1) Se $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b]$, então $-f(x) \geq 0$ e, assim,

$$\acute{A}rea\ S = -\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

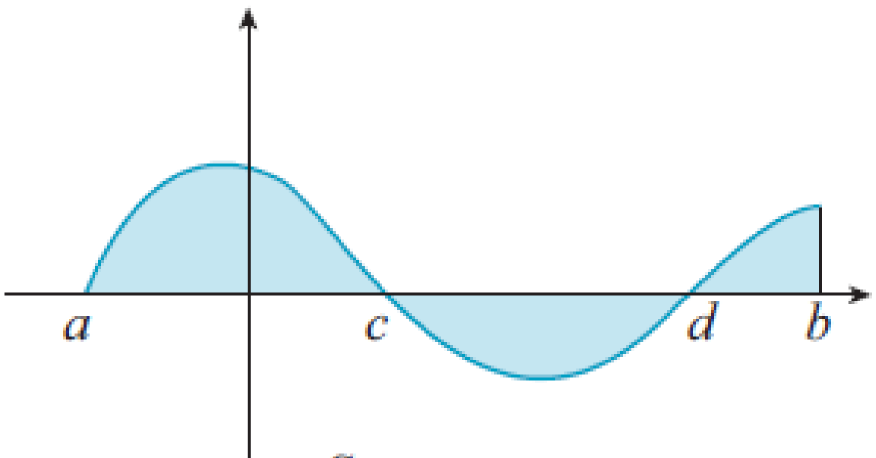


$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b \ \ e \ \ f(x) \leq y \leq 0\}$$

Cálculo de Áreas

Observação. Se a região S é descrita como na Figura 1.14, então

$$\text{Área } S = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx.$$



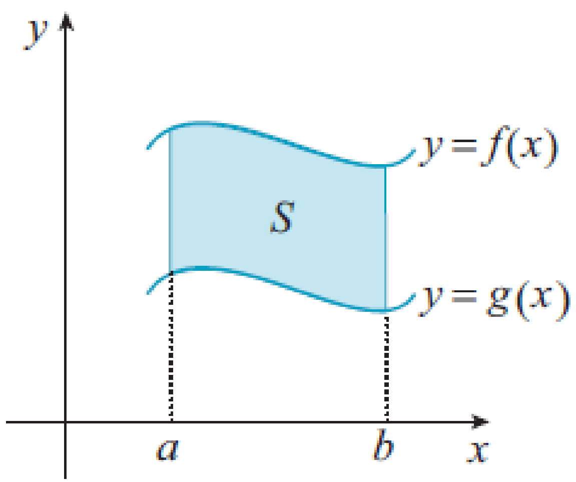
S é o conjunto hachurado

Figura 1.14

Cálculo de Áreas

2) Se a região plana está entre os gráficos de duas funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$, e as retas $x = a$ e $x = b$, com $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, então:

$$Área\ S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx.$$



$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b\ \ e\ \ g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

Figura 1.15

Cálculo de Áreas

A Figura 1.15 ilustra o caso onde S é a região limitada pelas retas $x = a$ e $x = b$, e pelos gráficos das funções f e g com $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Note que $f(x) - g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Se for mantido $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, mesmo que f e g não satisfaçam a condição $f(x) \geq 0$ e/ou $g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, a fórmula para o cálculo da área do conjunto S continua o mesmo. As Figuras 1.16 (a) e 1.16 (b) ajudam a visualizar o cálculo da área.

Conclusão. Se $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, então

$$\textit{Área } S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$

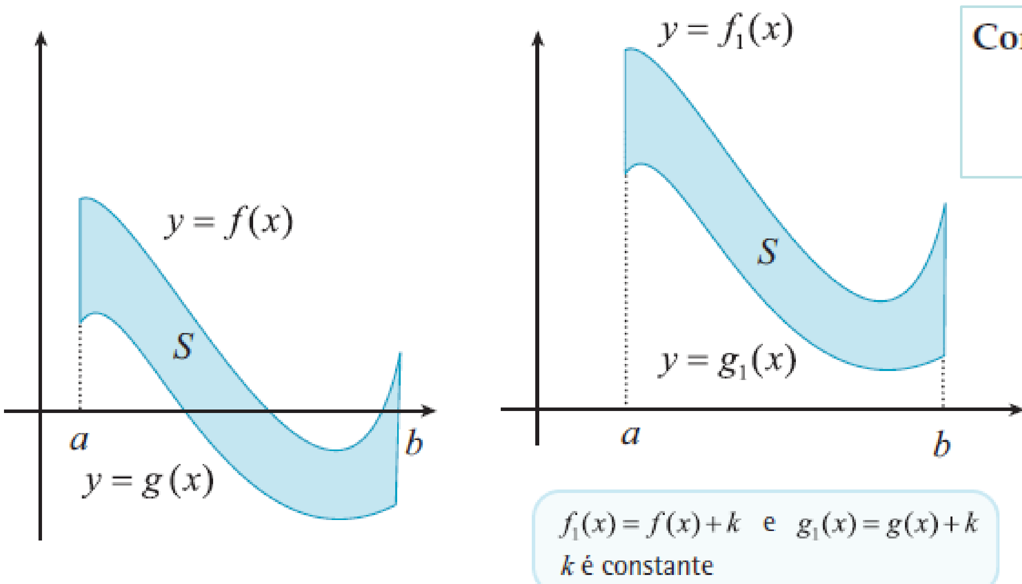


Figura 1.16

Exemplos

Exemplo 1.38. Calcular a área da região S limitada pelas retas $x=1$, $x=2$ e $y=0$ e pela curva $y=x^3+2$.

Solução. A região S está ilustrada na Figura 1.17.

$$\text{Área } S = \int_1^2 (x^3+2)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4}+2x\right)\Bigg|_1^2$$

$$= \frac{23}{4}\,u.a.$$

Exemplos

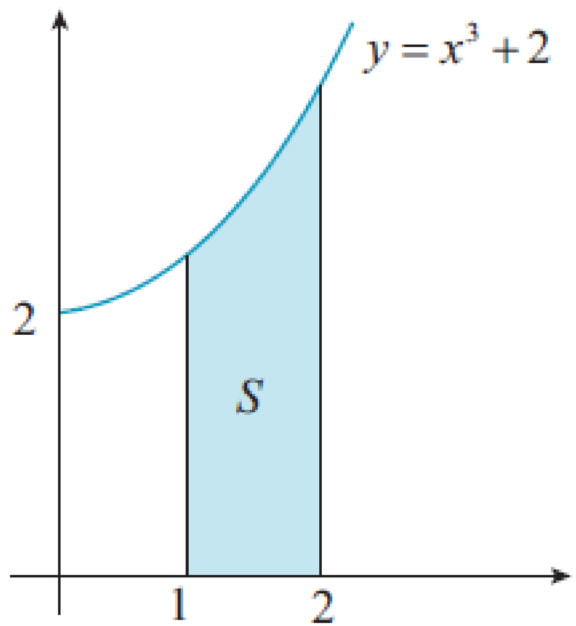


Figura 1.17

Observação. Em alguns casos $x = a$ e/ou $x = b$ precisam ser determinados.

Exemplos

Exemplo 1.39. Encontre a área da região S limitada pelo eixo x e pela parábola $y = x^2 + x - 2$.

Solução. A parábola $y = x^2 + x - 2$ corta o eixo dos x nos pontos $x = -2$ e $x = 1$, (ver Figura 1.18). Como $y = f(x) = x^2 + x - 2 \leq 0$ em $[-2, 1]$, resulta que

$$\text{Área } S = -\int_{-2}^{1} (x^2 + x - 2)\, dx$$

$$= -\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]\Bigg|_{-2}^{1}$$

$$= -\left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{9}{2} \text{ u.a.}$$

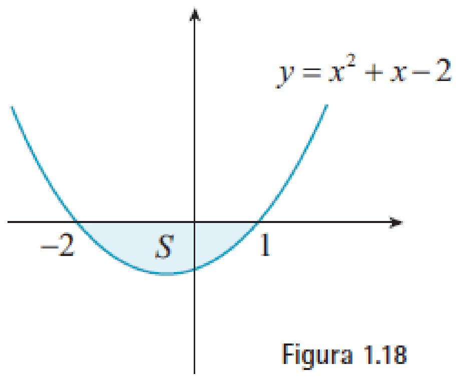


Figura 1.18

Exemplos

Exemplo 1.40. Calcular a área da região S limitada pelas retas $x = \frac{1}{2}$ e $y = -x + 2$ e pela curva $x = \sqrt{y}$.

Solução. As curvas $y = -x + 2$ e $x = \sqrt{y}$ interceptam-se no ponto de abscissa 1 (ver Figura 1.19).

$$\text{Área } S = \int_{\frac{1}{2}}^{1} [-x + 2 - x^2]\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right] \Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{1}{3} u.a.$$

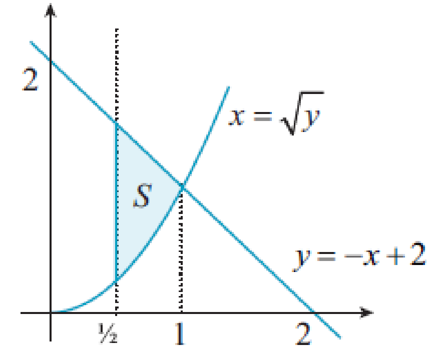


Figura 1.19

Exemplos

Exemplo 1.41. Encontre a área da região S limitada pelas retas $y = x + 2$, $y = 2$, $y = -1$ e pela curva $x = y^2$.

Solução. As retas $y = x + 2$ e $y = -1$ interceptam-se no ponto de abscissa -3. As curvas $y^2 = x$ e $y = 2$ interceptam-se no ponto de abscissa 4. As curvas $y^2 = x$ e $y = -1$ interceptam-se no ponto de abscissa 1. A Figura 1.20 indica os pontos de interseção das curvas.

$$\text{Área } S = \int_{-3}^{0} [x + 2 - (-1)]\, dx + \int_{0}^{4} (2 - \sqrt{x})\, dx + \int_{0}^{1} [-\sqrt{x} - (-1)]\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_{-3}^{0} + 3x\Big|_{-3}^{0} + 2x\Big|_{0}^{4} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{4} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{1} + x\Big|_{0}^{1}$$

$$= \frac{15}{2}\, u.a.$$

Exemplos

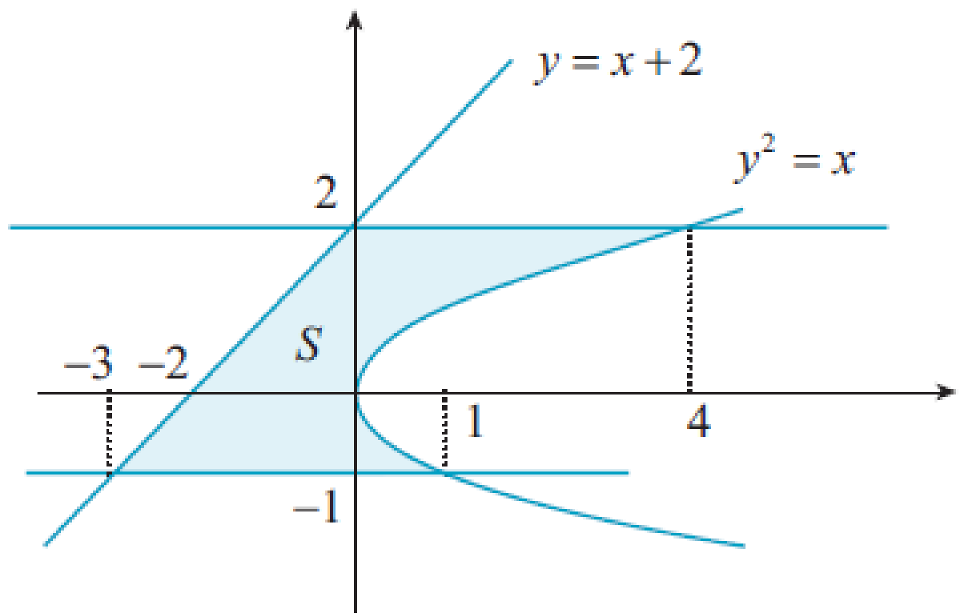


Figura 1.20

Outra maneira para encontrar a área acima é calcular a integral $Área\ S = \int_{-1}^{2} [y^2 - (y-2)]\, dy$.

Tarefa 7

Resolver os seguintes exercícios, digitalizar e enviar no moodle grupos.

15. Determinar a área da região limitada entre as curvas $y = x + 6$ e $y = x^2$.

19. Encontrar a área da região limitada pela curva $y = f(x) = sen\, x$ e pelo eixo x de 0 a 2π.