Introdução à Integral

Técnicas de Integração

Técnicas de Integração

Muitas vezes, para calcular uma integral indefinida precisamos usar certos artifícios matemáticos para transformá-la em outra integral mais simples de ser obtida. Nesta seção vamos apresentar duas técnicas básicas para calcular integrais indefinidas, que são:

- Método da Substituição ou Mudança de Variável, e
- Método da Integração por Partes.

Substituição ou mudança de variável

Sejam f e F funções tais que $F' = f$. Suponhamos que g seja outra função derivável tal que a imagem da g esteja no domínio de F. Podemos considerar a função composta $F \circ g$. Aplicando a Regra da Cadeia e usando o fato $F' = f$ temos

$$\begin{aligned}[F(g(x))]' &= F'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= f(g(x)) \cdot g'(x).\end{aligned}$$

Assim, usando a Definição 6.5, obtemos a fórmula de integração pelo método da substituição

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + c.$$

Substituição ou mudança de variável

Se fizermos a mudança de variável $u = g(x)$ e substituirmos $g'(x)\,dx$ pela diferencial du, então

$$\int f(g(x)).g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + c.$$

A técnica da mudança de variável é uma ferramenta poderosa para calcular integrais indefinidas, que permite substituir uma integral relativamente complicada por uma mais simples. Vejamos alguns exemplos.

Diferenciais foram vistas no **Módulo 3**.
Se $u = g(x)$ é uma função diferenciável,
então $du = g'(x)\ dx$.

Exemplos

Calcular as integrais indefinidas:

a) $\int 2x e^{x^2} dx$

Solução.

Para calcular a integral $\int 2x e^{x^2} dx$, faremos a mudança de variável

$u = x^2$ e obtemos $du = 2x\,dx$.

Logo,

$$\int 2x e^{x^2} dx = \int e^u du$$

$$= e^u + c \text{ (voltando à variável inicial } x\text{)}$$

$$= e^{x^2} + c.$$

Exemplos

b) $\int \cos(3x+2)\,dx$

Para calcular a integral $\int \cos(3x+2)\,dx$, faremos a substituição

$u = 3x+2$ e obtemos $du = 3dx$ ou $\frac{du}{3} = dx$.

Assim,

$$\int \cos(3x+2)\,dx = \int \frac{\cos u}{3}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\int \cos u\,du$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{sen} u + c$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x+2) + c.$$

Exemplos

c) $\int 3x^2(x^3+2)^{10}\,dx$

Encontraremos a $\int 3x^2(x^3+2)^{10}\,dx$ fazendo a mudança de variável

$u = x^3 + 2$. Segue que $du = 3x^2 dx$.

Logo,

$$\int 3x^2(x^3+2)^{10}\,dx = \int u^{10}\,du$$

$$= \frac{u^{11}}{11} + c$$

$$= \frac{(x^3+2)^{11}}{11} + c.$$

Exemplos

Exemplo 1.27. Use o método da substituição para mostrar que

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \ln |\sec x| + c.$$

Solução.

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx.$$

Fazendo $u = \cos x$ obtemos $du = -\operatorname{sen} x \, dx$.

Assim,

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\int \frac{du}{u}$$

$$= -\ln |u| + c$$

$$= \ln \left| \frac{1}{\cos x} \right| + c$$

$$= \ln |\sec x| + c.$$

Exemplos

Exemplo 1.28. Calcule a integral indefinida $\int x^2\sqrt{1+x}\,dx$.

Solução. Fazendo $t^2 = 1+x$ com $t \geq 0$, obtemos $2t\,dt = dx$.
Assim,

$$\begin{aligned}
\int x^2\sqrt{1+x}\,dx &= \int (t^2-1)^2 \cdot t \cdot 2t\,dt \\
&= 2\int (t^2-1)^2 \cdot t^2 dt \\
&= 2\int (t^4-2t^2+1)\cdot t^2 dt \\
&= 2\int (t^6-2t^4+t^2)\,dt \\
&= 2\left[\frac{t^7}{7}-\frac{2t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right]+c \\
&= 2t^3\left[\frac{t^4}{7}-\frac{2t^2}{5}+\frac{1}{3}\right]+c \\
&= 2(1+x)\sqrt{(1+x)}\left[\frac{(1+x)^2}{7}-\frac{2(1+x)}{5}+\frac{1}{3}\right]+c.
\end{aligned}$$

Exemplos

Exemplo 1.29. Calcule a integral $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5}$.

Solução.

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5} = \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 4}$$

Fazendo $u = x - 1$ obtemos $du = dx$. Assim,

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5} = \int \frac{1}{u^2 + 4} du$$

$$= \int \frac{\frac{1}{4}}{\frac{u^2 + 4}{4}} du$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{du}{\left(\frac{u}{2}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{2dt}{t^2 + 1} \quad \text{(fazendo } t = \frac{u}{2} \text{ obtemos } 2dt = du\text{)}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} \quad \text{(tabela)}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} t + c$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{2} + c$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{(x-1)}{2} + c.$$

Substituição ou mudança de variável

O método da substituição de variável pode ser usado para calcular integrais definidas. Podemos utilizá-lo de duas formas:

1) Mudamos os limites de integração ao fazer a mudança de variável e aplicamos o Teorema Fundamental do Cálculo. Nesse caso, a fórmula da integração torna-se:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du. \quad (u = g(x))$$

2) Calculamos a integral indefinida correspondente e em seguida aplicamos o Teorema Fundamental do Cálculo.

Exemplos

Exemplo 1.30. Calcule a integral definida $\int_0^2 \frac{4x}{x^2+1}\,dx$.

Solução. Fazendo $u = x^2 + 1$ obtemos $du = 2x\,dx$. Para encontrar os novos limites de integração, notemos que

se $x = 0$ então $u = 1$;
se $x = 2$ então $u = 5$.

Assim,

$$\int_0^2 \frac{4x}{x^2+1}\,dx = 2\int_1^5 \frac{du}{u}$$
$$= 2\ln|u|\Big|_1^5$$
$$= 2\ln 5 - 2\ln 1$$
$$= 2\ln 5.$$

Outra maneira de calcular a integral definida é obter primeiramente a integral indefinida e, em seguida, aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo. Vejamos:

$$\int \frac{4x}{x^2+1}\,dx = 2\int \frac{du}{u} \quad (u = x^2+1, \text{ temos } du = 2x\,dx)$$
$$= 2\ln|u| + c$$
$$= 2\ln(x^2+1) + c.$$

Aplicando o TFC, temos

$$\int_0^2 \frac{4x}{x^2-1}\,dx = 2\ln(x^2+1)\Big|_0^2$$
$$= 2\ln 5 - 2\ln 1$$
$$= 2\ln 5.$$

Exemplos

Exemplo 1.31. Encontre a área da região S limitada pelo gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} 2x$, pelas retas $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$, e o eixo dos x.

Solução. A região S está ilustrada na Figura 1.11.

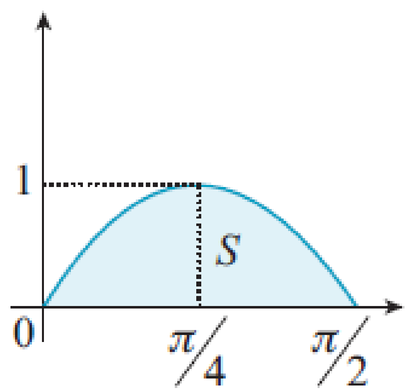

Figura 1.11

Como $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, a área da região S (ver definição na Seção 1.2) é dada por

$$\acute{A}rea\ S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} 2x\, dx.$$

Exemplos

Fazendo $u = 2x$, obtemos $du = 2dx$. Os novos limites de integração são:

se $x = 0$, então $u = 0$;

se $x = \frac{\pi}{2}$, então $u = \pi$.

Logo,

$$\acute{A}rea\ S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} u\, du$$

$$= -\frac{1}{2}\cos u \Big|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}(\cos\pi - \cos 0)$$

$$= 1 u.a.$$

Tarefa 5

Resolver os seguintes exercícios, digitalizar e enviar no moodle grupos.

1. Calcular $\int_0^1 (x^3 + 3)^2 \cdot 3x^2 dx$.

4. Calcular $\int \frac{x}{1+x^2} dx$.

Integração por partes

Sejam f e g funções deriváveis num mesmo intervalo I. Pela regra da derivada do produto, temos:

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)\,.$$

Note que $[f(x)\cdot g(x)]$ é uma primitiva de $[f(x)\cdot g(x)]'$. Assim, podemos escrever

$$\int [f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)]\,dx = f(x)\cdot g(x) + c_1,$$

ou ainda

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx + c_1.$$

Integração por partes

Observe que ao desenvolver a integral no segundo membro surgirá outra constante de integração. Supriremos a constante c_1 na fórmula acima e no final do processo introduziremos uma constante c para representar todas as constantes de integração envolvidas. Desse modo podemos escrever:

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx,$$

que é a fórmula de integração por partes.

Integração por partes

Vamos reescrever a fórmula da integração por partes, usando uma notação que se torna fácil de ser memorizada. Fazendo

$u = f(x)$ e $v = g(x)$, temos $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)\,dx$.

Então a fórmula da integração por partes pode ser escrita como

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du.$$

Exemplos

Exemplo 1.32. Calcular a integral $\int x\cos x\,dx$.

Solução. Vamos aplicar o método da integração por partes para calcular a integral. Para isso, devemos escolher u e dv. Fazendo

$u = x$ e $dv = \cos x\,dx$, temos

$du = dx$ e $v = \operatorname{sen} x$.

Aplicando a fórmula da integração por partes, obtemos

$$\int x\cos x\,dx = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx$$
$$= x\operatorname{sen} x + \cos x + c\,.$$

Exemplos

Exemplo 1.33. Calcular a integral $\int \ln x\, dx$.

Solução. Fazendo

$u = \ln x$ e $dv = dx$, temos

$$du = \frac{1}{x}dx \quad \text{e} \quad v = x.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \ln x\, dx &= x\ln x - \int x\frac{1}{x}\, dx \\ &= x\ln x - \int dx \\ &= x\ln x - x + c.\end{aligned}$$

Exemplos

Exemplo 1.34. Calcular a integral $\int \operatorname{arcsen} x\, dx$.

Solução. Fazendo

$u = \operatorname{arcsen} x$ e $dv = dx$, obtemos

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad \text{e} \quad v = x.$$

Aplicando a fórmula de integração por partes, temos:

$$\int \operatorname{arcsen} x\, dx = x \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Para calcular a integral $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ faremos a mudança de variável,

$t = 1 - x^2$ e obtemos $dt = -2x\, dx$.

Exemplos

Assim,

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}dt$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c_1$$

$$= -\sqrt{1-x^2} + c_1 \,.$$

Portanto,

$$\int \text{arcsen}\, x\, dx = x\, \text{arcsen}\, x + \sqrt{1-x^2} + c, \text{ onde } (c = -c_1).$$

Exemplos

Exemplo 1.35. Calcular a integral $\int x^2 \cos 2x \, dx$.

Solução. Fazendo

$$u = x^2 \quad \text{e} \quad dv = \cos 2x \, dx \text{ obtemos}$$

$$du = 2x \, dx \quad \text{e} \quad v = \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x.$$

Assim,

$$\int x^2 \cos 2x \, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{sen} 2x - \int x \operatorname{sen} 2x \, dx.$$

Para calcular a $\int x \operatorname{sen} 2x \, dx$ devemos aplicar novamente o método da integração por partes.

Exemplos

Fazendo

$$u = x \quad \text{e} \quad dv = \operatorname{sen} 2x\, dx \text{ obtemos}$$

$$du = dx \quad \text{e} \quad v = -\frac{1}{2}\cos 2x.$$

Segue que,

$$\int x \operatorname{sen} 2x\, dx = -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$$

$$= -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + c_1.$$

Portanto,

$$\int x^2 \cos 2x\, dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{x}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + c.$$

Exemplos

Exemplo 1.36. Calcular a integral $\int e^{3x} \cos x \, dx$.

Solução. Fazendo

$$u = e^{3x} \quad \text{e} \quad dv = \cos x \, dx \quad \text{temos}$$

$$du = 3e^{3x} dx \quad \text{e} \quad v = \operatorname{sen} x.$$

Assim,

$$\int e^{3x} \cos x \, dx = e^{3x} \operatorname{sen} x - 3\int e^{3x} \operatorname{sen} x \, dx.$$

Para calcular a integral $\int e^{3x} \operatorname{sen} x \, dx$ aplicamos novamente a integração por partes. Fazendo

$$u = e^{3x} \quad \text{e} \quad dv = \operatorname{sen} x \, dx \quad \text{temos}$$

$$du = 3e^{3x} dx \quad \text{e} \quad v = -\cos x.$$

Exemplos

Segue que

$$\int e^{3x}\,\mathrm{sen}\,x\,dx = -e^{3x}\cos x + 3\int e^{3x}\cos x\,dx.$$

Logo,

$$\int e^{3x}\cos x\,dx = e^{3x}\,\mathrm{sen}\,x + 3e^{3x}\cos x - 9\int e^{3x}\cos x\,dx.$$

Note que a integral do segundo membro é igual à integral que queremos calcular.

Chamando $I = \int e^{3x}\cos x\,dx$ podemos escrever

$$I = e^{3x}\,\mathrm{sen}\,x + 3e^{3x}\cos x - 9I,$$

ou seja,

$$I = \frac{1}{10}[e^{3x}\,\mathrm{sen}\,x + 3e^{3x}\cos x].$$

Portanto,

$$\int e^{3x}\cos x\,dx = \frac{e^{3x}}{10}[\mathrm{sen}\,x + 3\cos x] + c.$$

Integração por partes

Podemos calcular integrais definidas usando integração por partes. Combinando a fórmula de integração por partes com o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx,$$

que é a fórmula de integração por partes para integral definida.

Exemplos

Exemplo 1.37. Avalie a integral $\int_1^2 x \ln x \, dx$.

Solução. Fazendo

$$u = f(x) = \ln x \quad \text{e} \quad dv = g'(x)\,dx = x\,dx \text{ obtemos}$$

$$du = f'(x)\,dx = \frac{1}{x}dx \quad \text{e} \quad v = g(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Usando a fórmula da integração por partes para integral definida, temos

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x \bigg|_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2} dx$$

$$= \left(\frac{2^2}{2} \ln 2 - \frac{1^2}{2} \ln 1 \right) - \frac{x^2}{4} \bigg|_1^2$$

$$= 2 \ln 2 - \left(\frac{2^2}{4} - \frac{1}{4} \right)$$

$$= 2 \ln 2 - \frac{3}{4}.$$

Tarefa 6

Resolver os seguintes exercícios, digitalizar e enviar no moodle grupos.

11. Calcular $\int x^2 e^x dx$.

12. Calcular $\int_1^e \ln x \, dx$.