Introdução à Integral

Integral Indefinida. Propriedades da Integral Indefinida. Integrais Imediatas.

Integral Indefinida

Definição 6.5. Seja f uma função integrável em $[a, b]$. Toda
ção $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $G(x) = \int_a^x f(t)\, dt + k$ onde k é
constante, é chamada integral indefinida da função f.

Integral Indefinida

Observação: Se F é uma primitiva de f em $[a, b]$ então, pelo T.F.C., a integral indefinida de f é

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + k = F(x) - F(a) + k = F(x) + C\,,$$

onde $C = k - F(a)$ é chamada constante de integração.

Assim, se F é uma primitiva de f a integral indefinida de f é dada por $G(x) = F(x) + C$ que representa a família de todas as primitivas de f.

A integral indefinida de f é também representada por $\int f(x)\,dx$.

Integral Indefinida

Em síntese, quando a função f possui primitiva temos:

1) $\int f(x)\,dx = F(x) + C \;\Leftrightarrow\; F'(x) = f(x)$.

2) $\int f(x)\,dx$ representa uma família de funções, isto é, a família ou o conjunto de todas primitivas da função integrando.

3) $\dfrac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = \dfrac{d}{dx}(F(x) + C) = \dfrac{d}{dx}F(x) = F(x) = f(x)$.

Para reforçar a diferença entre $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int f(x)\,dx$, dizemos também que a integral de f, $\int_a^b f(x)\,dx$, é a integral definida de f.

Exemplos

Exemplo 1. Como $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$ temos $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$

Exemplo 2. Como $\dfrac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$ temos $\int 4\,x^3 \; dx \; = x^4 + C$.

Exemplo 3. Como $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ temos $\int \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \, dx = \sqrt{x} + C$.

Exemplos

Exemplo 4. Como $\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x$ temos $\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + C$.

Exemplo 5. Como $\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{1}{1+x^2}$ temos

$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arc\,tg} x + C$.

Exemplo 6. Como $\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{5}\, x^{\frac{5}{3}}\right) = x^{\frac{2}{3}}$ temos $\int x^{\frac{2}{3}} \, dx = \frac{3}{5}\, x^{\frac{5}{3}} + C$.

Propriedades da Integral Indefinida

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções reais integráveis definidas no mesmo domínio e C uma constante real. Então:

P1. $\int C \cdot f(x)\,dx = C \cdot \int f(x)\,dx$.

P2. $\int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

Exemplos

a) $\int x^3 dx = \dfrac{x^4}{4} + c$, pois $\left(\dfrac{x^4}{4}\right)' = x^3$.

b) $\int e^{2x} dx = \dfrac{e^{2x}}{2} + c$, pois $\left(\dfrac{e^{2x}}{2}\right)' = e^{2x}$.

c) $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c$, pois $(-\cos x)' = \operatorname{sen} x$.

Tarefa 3

Resolver o seguinte exercício, digitalizar e enviar no moodle grupos.

13. Calcular $\int (x^3 + \cos x)dx$.

17. Calcular $\int \left(3e^x + \frac{1}{4x} - sen\ x\right) dx$.

Integrais Imediatas

- Podemos construir uma tabela de integrais a partir das derivadas das funções elementares.
- Chamamos essas integrais de imediatas.

Integrais Imediatas

1) $\int dx = x + C$.

2) $\int x^n \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, para $n \neq -1$.

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln |x| + C$.

4) $\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, para $a > 0,\ a \neq 1$.

5) $\int e^x \, dx = e^x + C$.

6) $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$.

7) $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$.

8) $\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + C$.

9) $\int \operatorname{cossec}^2 x \, dx = -\operatorname{cotg} x + C$

10) $\int \sec x \cdot \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + C$.

11) $\int \operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x \, dx = -\operatorname{cotg} x + C$.

12) $\int \dfrac{1}{1 + x^2} \, dx = \operatorname{arc\,tg} x + C$.

13) $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{a} + C$.

14) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = \operatorname{arc\,sen} x + C$.

15) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{x}{\mathrm{a}} + C$.

16) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arc\,sec} x + C$.

17) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 1} \right| + C$.

18) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| + C$.

Exemplos

Exemplo 1.22. Calcular a integral indefinida $\int \left(\frac{1}{x} + \operatorname{sen} x \right) dx.$

Solução.

$$\int \left(\frac{1}{x} + \operatorname{sen} x \right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx + \int \operatorname{sen} x\, dx \quad \text{(propriedade da integral)}$$

$$= \ln|x| + c_1 - \cos x + c_2 \quad (c_1 \text{ e } c_2 \text{ constantes arbitrárias})$$

$$= \ln|x| - \cos x + c \quad (c = c_1 + c_2).$$

Exemplos

Exemplo 1.23. Calcular a integral indefinida $\int \frac{x^3+3x^2+4}{x}\,dx$.

Solução.

$$\int \frac{x^3+3x^2+4}{x}\,dx = \int\left(x^2+3x+\frac{4}{x}\right)dx$$

$$= \int x^2dx + 3\int x\,dx + 4\int \frac{1}{x}\,dx \quad \text{(propriedades da integral)}$$

$$= \frac{x^3}{3} + c_1 + 3\frac{x^2}{2} + c_2 + 4\ln|x| + c_3$$

$$= \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 4\ln|x| + c \;\; (c = c_1 + c_2 + c_3).$$

Observação. Quando tivermos uma soma de várias integrais indefinidas, escreveremos uma única constante para indicar a soma das constantes de integração.

Exemplos

Exemplo 1.25. Calcule a integral definida $\int_0^1 \frac{2}{x^2+1}\,dx$.

Solução.

$$\int_0^1 \frac{2dx}{x^2+1} = 2\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= 2\,\text{arc tg}\, x\Big|_0^1 \quad \text{(tabela - item 12 e TFC)}$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Tarefa 4

Resolver os seguintes exercícios, digitalizar e enviar no moodle grupos.

16. Calcular $\int (7x^4 + \sec^2 x)dx$.

18. Calcular $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(3e^x + \frac{1}{4x} - sen\ x\right) dx$