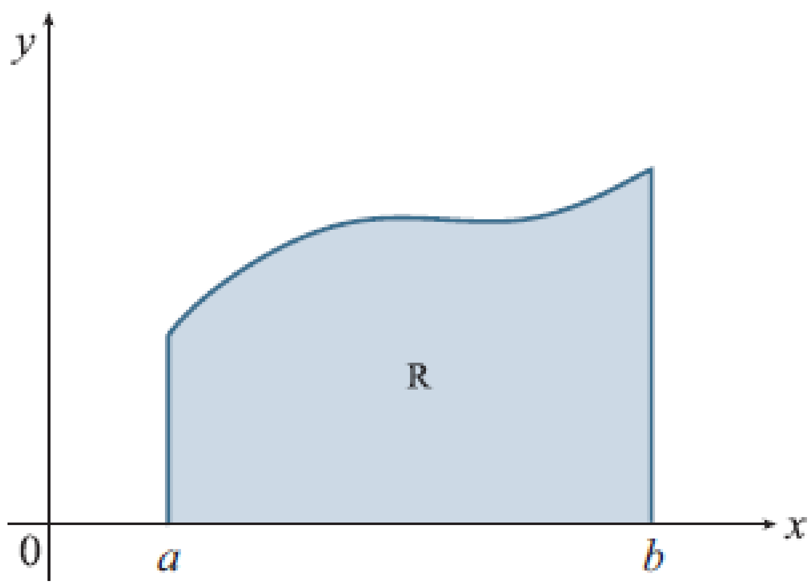
Introdução à Integral

Conceito de Área. A Integral. Função Primitiva. Teorema Fundamental do Cálculo (TFC).

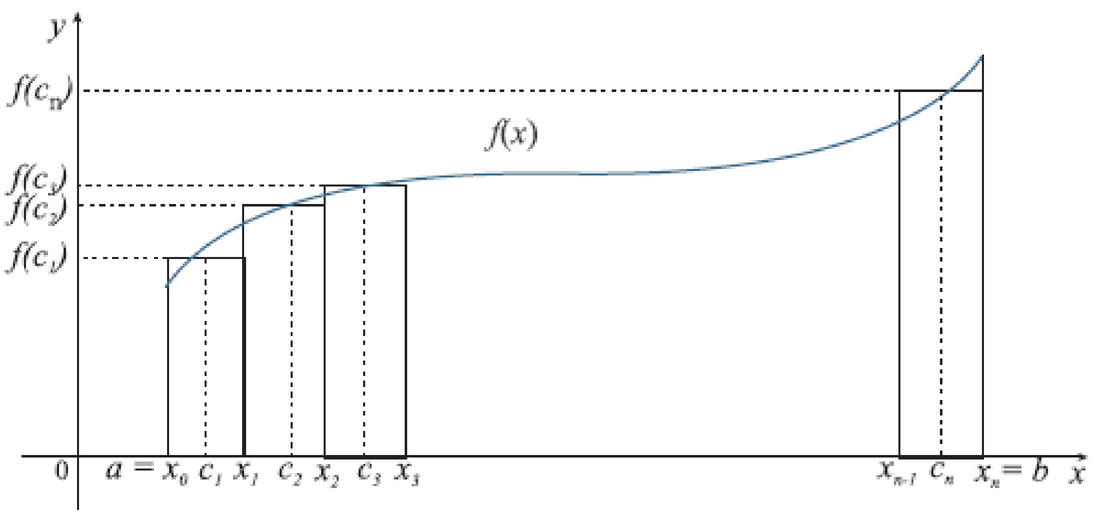
Conceito de Área

Considere o problema de calcular a área de uma região R do plano, limitada por duas retas verticais $x = a$ e $x = b$, pelo eixo x e pelo gráfico de uma função $f(x)$ limitada e não negativa no intervalo fechado $[a, b]$, conforme figura abaixo:



Conceito de Área

- A área de uma figura plana qualquer pode ser calculada aproximando a figura por polígonos cujas áreas possam ser calculadas pelos métodos da geometria elementar.
- Para isso, vamos fazer uma partição *P* do intervalo [*a*,*b*] , isto é, vamos dividir o intervalo [*a*, *b*] em *n* subintervalos, por meio de pontos escolhidos arbitrariamente da seguinte maneira:



Conceito de Área

Assim a soma das áreas dos n retângulos, denotada por S_n, será

$$S_n = f(c_1)\cdot\Delta x_1 + f(c_2)\cdot\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\cdot\Delta x_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i\,.$$

Essa soma é chamada Soma de Riemann da função f relativa à partição P. Quando n cresce, é "razoável" esperar que a soma das áreas dos retângulos tenda à área A sob a curva. Deste modo, definimos a medida da área A da região R como sendo

$A = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i$ se esse limite existir. E então se diz que a região R é mensurável.

A Integral

Definição 6.1. Seja $f(x)$ uma função limitada definida no intervalo fechado $[a,\ b]$ e seja P uma partição qualquer de $[a,\ b]$. A integral de $f(x)$ no intervalo $[a,\ b]$, denotada por $\int_a^b f(x)\,dx$, é dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i \,,$$

desde que o limite do segundo membro exista.

A Integral

Na notação $\int_a^b f(x)\,dx$:

- $f(x)$ é chamada função integrando;
- $\int$ é o símbolo da integral.

Os números a e b são chamados limites de integração (a = limite inferior e b = limite superior).

Se $\int_a^b f(x)\,dx$ existe, diz-se que f é integrável em $[a,\ b]$ e geometricamente a integral representa a área da região limitada pela função $f(x)$, as retas $x = a$ e $x = b$ e o eixo x, desde que $f(x) \geq 0\ \ \forall x \in [a,\ b]$.

A Integral

O método de calcular a área, conforme a secção 6.1 pode ser ampliado de modo a incluir o caso em que o limite inferior seja maior do o limite superior e o caso em que os limites inferior e superior são iguais, senão vejamos.

Definição 6.2. Se $a > b$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

se a integral à direita existir.

Definição 6.3 Se $a = b$ e $f(a)$ existe, então $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

A Integral

Teorema 6.1. Se $f(x)$ é uma função contínua no intervalo fechado, $[a, b]$ então $f(x)$ é integrável em $[a, b]$.

Propriedades

P1. Se a função $f(x)$ é integrável no intervalo fechado $[a,\ b]$ e se k é uma constante real qualquer, então

$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

P2. Se as funções $f(x)$ e $g(x)$ são integráveis em $[a,\ b]$, então $f(x)\ \pm\ g(x)$ é integrável em $[a,\ b]$ e

$$\int_a^b \big(f(x)\ \pm\ g(x)\big)\,dx\ =\int_a^b f(x)\,dx\ \geq\ \int_a^b g(x)\,dx.$$

P3. Se $a<c<b$ e a função $f(x)$ é integrável em $[a,c]$ e em $[c,b]$, então $f(x)$ é integrável em $[a,\ b]$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx\ =\ \int_a^c f(x)\,dx\ +\ \int_c^b f(x)\,dx.$$

Propriedades

P4. Se a função $f(x)$ é integrável e se $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

P5. Se as funções $f(x)$ e $g(x)$ são integráveis em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

P6. Se $f(x)$ é uma função integrável em $[a, b]$, então $|f(x)|$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Função Primitiva

No estudo da derivada tínhamos uma função e obtivemos, a partir dela, uma outra, a que chamamos de **derivada**. Agora, faremos o caminho inverso, isto é, dada a derivada, vamos encontrar ou determinar uma função original que chamaremos **primitiva**. Observe que é importante conhecer bem as regras de derivação e as derivadas de várias funções, estudadas no módulo 2, para determinar primitivas.

Definição 6.4 Uma função $F(x)$ é chamada uma **primitiva** da função $f(x)$ em um intervalo I, se para todo $x \in I$, tem-se $F'(x) = f(x)$.

Exemplos

Exemplo 1. A função $F(x)=\dfrac{x^5}{5}$ é uma primitiva da função

$f(x)=x^4$, pois $F'(x)=\dfrac{5\,x^4}{5}=x^4=f(x)$, para todo x real.

Exemplo 2. As funções $T(x)=\dfrac{x^5}{5}+9$, $H(x)=\dfrac{x^5}{5}-2$ também são

primitivas da função $f(x)=x^4$, pois $T'(x)=H'(x)=f(x)$.

Exemplo 3. A função $F(x)=\dfrac{e^{-3x}}{-3}$ é uma primitiva da função

$f(x) = e^{-3x}$, pois $F'(x)=\dfrac{-3\cdot e^{-3x}}{-3}=e^{-3x}=f(x)$ para todo x real.

Exemplo 4. A função $F(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ é uma primitiva da função

$f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, pois $F'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot x^{1/2-1}=\dfrac{1}{2}\cdot x^{-1/2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^{1/2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=f(x)$.

Função Primitiva

Observação. Seja I um intervalo em $\mathbb{R}$. Se $F: I \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de $f: I \to \mathbb{R}$, então para qualquer constante real k, a função $G(x)$ dada por $G(x) = F(x) + k$ é também uma primitiva de $f(x)$. Se $F, G: I \to \mathbb{R}$ são primitivas de $f: I \to \mathbb{R}$, então existe uma constante real k tal que $G(x) = F(x) + k$, para todo $x \in I$.

Exemplos

Exemplo 5. Você sabe que $(\text{sen}\, x)' = \cos x$. Assim, $F(x) = \text{sen}\, x$ é uma primitiva da função $f(x) = \cos x$ e toda primitiva da função $f(x) = \cos x$ é do tipo $G(x) = \text{sen}\, x + k$ para $k \in \mathbb{R}$. Assim,

$$G_1(x) = \text{sen}\, x + 10\ ,\ G_2(x) = \text{sen}\, x - 50 \ \ e \ \ G_3(x) = \text{sen}\, x - \frac{3}{4}\ ,$$

são todas primitivas da função $f(x) = \cos x$, pois

$G_1'(x) = G_2'(x) = G_3'(x) = \cos x = f(x)$.

Tarefa 1

Resolver o seguinte exercício, digitalizar e enviar no moodle grupos.

Encontrar uma primitiva $F(x)$, da função $f(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$, que satisfaça a seguinte condição $F(0) = 0$.

Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

Teorema 6.2. (Teorema Fundamental do Cálculo). Se a função $f(x)$ é integrável no intervalo fechado $[a, b]$ e se $F(x)$ é uma função de $f(x)$ neste intervalo, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Costuma-se escrever $F(x)\big|_a^b$ para indicar $F(b) - F(a)$.

Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

O Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) não só torna o cálculo de integrais mais simples, como também contém em si a relação entre a derivada, o limite e a integral. Isto porque o Teorema Fundamental afirma que o valor da integral, $\int_a^b f(x)\,dx$, pode ser calculado com o auxílio de uma função F tal que a derivada de F seja igual a f, possibilitando encontrar o valor de uma integral utilizando uma primitiva da função integrando.

Exemplos

Calcular as seguintes integrais definidas:

a) $\int_1^2 x^2\,dx$

A função $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ é uma primitiva da função $f(x) = x^2$. Logo,

$$\int_1^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2$$

$$= \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

Exemplos

b) $\int_{-1}^{1}(2x^3+3)\,dx$

Aplicando as propriedades da integral e o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_{-1}^{1}(2x^3+3)\,dx = 2\int_{-1}^{1}x^3dx + \int_{-1}^{1}3dx$$

$$= 2\frac{x^4}{4}\Bigg|_{-1}^{1} + 3x\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= 2\left[\frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4}\right] + 3[1-(-1)]$$

$$= 6.$$

Exemplos

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x + x)\, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x + x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, dx$$

$$= -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[-\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0)\right] + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2 + 8}{8}.$$

Exemplos

Calcule $\int_{-2}^{2} |x|\, dx$.

Solução. A função $f(x) = |x|$ pode ser escrita como

$$f(x) = \begin{cases} -x, \text{ se } -2 \le x \le 0 \\ x, \text{ se } 0 < x \le 2 \end{cases}.$$

Das propriedades da integral e o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_{-2}^{2} |x|\, dx = \int_{-2}^{0} -x\, dx + \int_{0}^{2} x\, dx$$

$$= -\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-2}^{0} + \frac{x^2}{2}\Bigg|_{0}^{2}$$

$$= 2 + 2 = 4.$$

Tarefa 2

Resolver os seguintes exercícios, digitalizar e enviar no moodle grupos.

2. Calcular $\int_1^3 (x^2 + 4)dx$.

4. Calcular a integral $\int_0^4 f(x)dx$,

   onde $f(x) = \begin{cases} x^2, se\ 0 \leq x \leq 2 \\ 2x, se\ 2 < x \leq 4 \end{cases}$.

9. Calcular $\int_0^{\pi} cos\ x\ dx$.