Máximos e mínimos de uma função

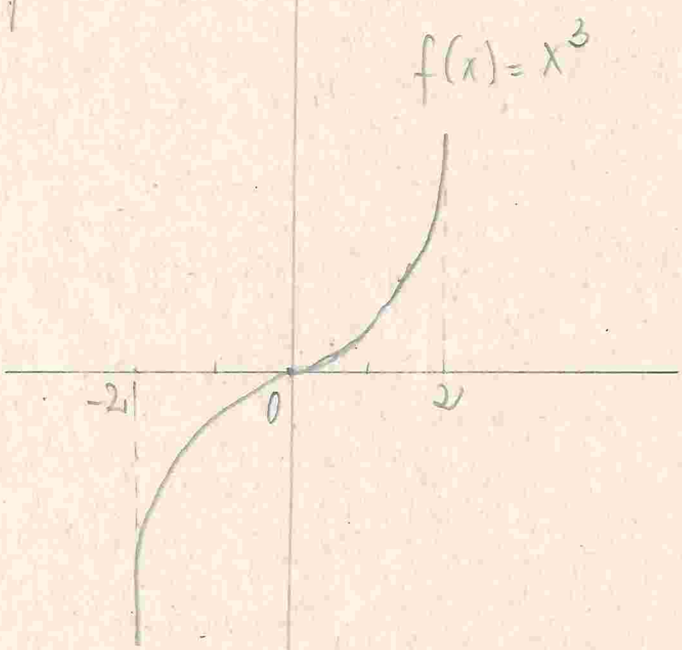
① $f(x) = x^2$, $x \in (-1, 1)$

$f'(x) = 2x$. A função tem máximo ou mínimo quando $f'(x_0) = 0$. Assim, temos $2x = 0$, quando $x = 0$. Portanto, dentro do intervalo dado, a função tem um mínimo absoluto em $x = 0$.

② $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2$. Portanto, para haver máximo ou mínimo $f'(x) = 0 \therefore 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

Em $x = 0$; $f'(0) = 0$. Porém a função não tem mínimo ou máximo, conforme podemos ver no gráfico:



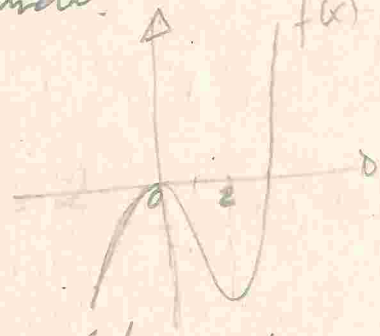
3) $f(x) = x^{2/3}$, $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

A função é derivável em todo $x \neq 0$. Porém, a função f possui um mínimo no ponto $x = 0$ pois $f(x) \geqslant 0$, para todo x, e não existe a $f'(0)$.

4) $f(x) = x^3 - 3x^2$; $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$; $f'(x) = 0$ quando:



$$3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(3x - 6) = 0$$

$\boxed{x = 0}$ $\quad 3x = 6$

$\boxed{x = 2}$

Logo, $x = 0$ e $x = 2$ são os pontos críticos da função.

5) $f(x) = (x-1)^{2/3}$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{-1/3}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(x-1)}}$$

$$f'(1) = \frac{2}{3\sqrt[3]{1-1}} = \frac{2}{3.0} = \frac{2}{0}$$

Isso implica que a função não é derivável em $x = 1$. Portanto, esse é o único ponto crítico da função.

Funções crescentes e decrescentes

⑥ $f(x) = x^3 - 3x^2, \; x \in \mathbb{R}$

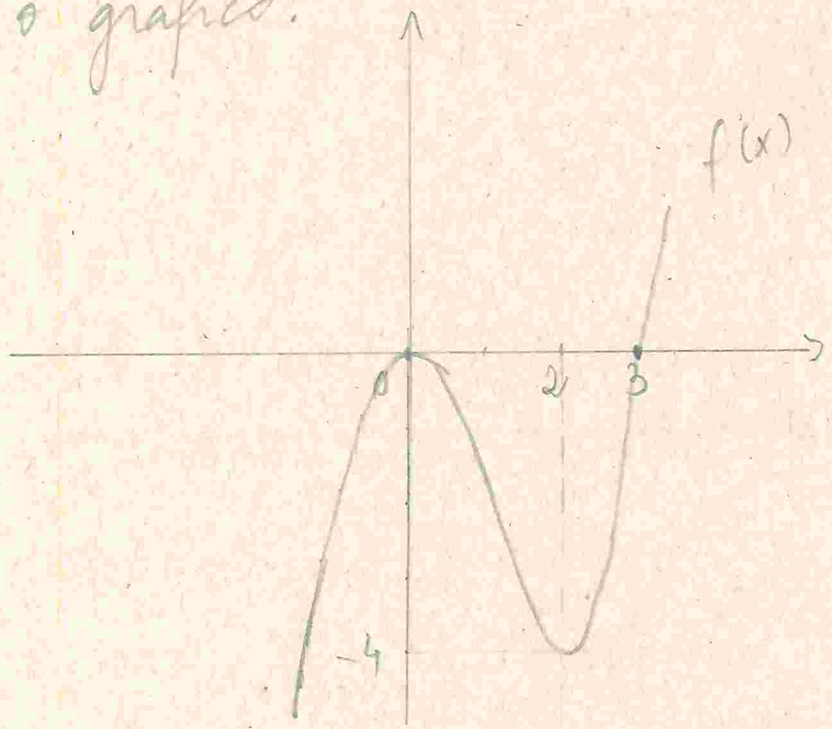
$f'(x) = 3x^2 - 6x = x(3x-6) \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ x=2 \end{matrix}$

Analisando o gráfico da <u>função derivada</u> temos:

$f'(x) > 0$ quando $x < 0$ ou $x > 2$

$f'(x) < 0$ quando $0 < x < 2$. Logo, a função é <u>crescente</u> nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(2, +\infty)$ e <u>decrescente</u> no intervalo $(0, 2)$.

Veja o gráfico.

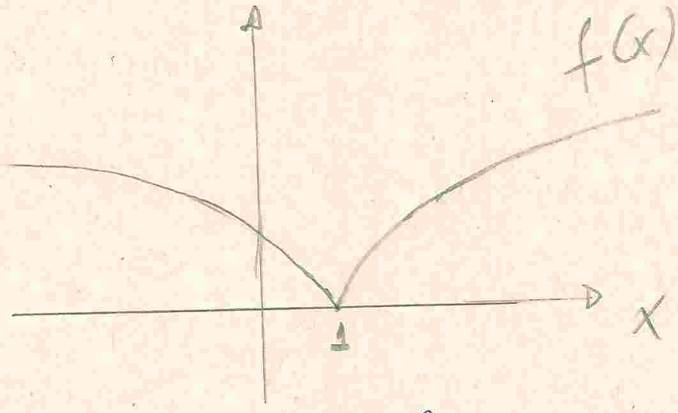


⑦ $f(x) = (x-1)^{2/3}$, $x \in \mathbb{R}$.

Conforme visto na questão 5, esta função é derivável em todo seu domínio, exceto em $x_0 = 1$.

Mas $f'(x) = \dfrac{2^{1/3}}{3\sqrt[3]{(x-1)}} < 0$, em todo $x < 1$ e $f'(x) > 0$ em todo $x > 1$.

A função f é decrescente em $(-\infty, 1)$ e crescente em $(1, +\infty)$; logo f tem um mínimo absoluto em $x_0 = 1$.



⑧ $f(x) = 2x^4 + \frac{8}{3}x^3 - 8x^2$, $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 8x^3 + 8x^2 - 16x = 8x(x+2)(x-1)$

$f'(x) = 0$ em $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$ (raízes).

Logo $x = 0, 1, -2$ são pontos críticos. Para saber quais pontos são de mínimo ou máximo, derivamos pela segunda vez:

$f''(x) = 24x^2 + 16x - 16$

(continua)

Agora analisamos a $f''(x)$ nos pontos críticos:

$f''(0) = 24 \cdot 0^2 + 16 \cdot 0 - 16 = -16 < 0$

$f''(1) = 24 \cdot 1^2 + 16 \cdot 1 - 16 = 24 > 0$

$f''(-2) = 24 \cdot (-2)^2 + 16 \cdot (-2) + 16 = -96 < 0$

Se $f''(x_0) < 0$, x_0 é máximo local;
Se $f''(x_0) > 0$, x_0 é mínimo local.

Assim, $x_1 = 0$ é ponto de máximo local e $x_2 = 1$ e $x_3 = -2$ são pontos de mínimo.

9) a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 6x - 2$; $f''(x) = 6 > 0$

Quando $f''(x_0) > 0$, o gráfico tem concavidade positiva em x_0. Portanto a função f tem concavidade para cima em todo seu domínio.

b) $f(x) =$ $x^3 - 3x + 6$, $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 3$; $f''(x) = 6x$

$f''(x) = 6x > 0$ quando $x > 0$

$f''(x) = 6x < 0$ " $x < 0$

Portanto, a função é côncava para cima em $(0, +\infty)$ e côncava para baixo em $(-\infty, 0)$. A função muda de concavidade em $x = 0$, então esse é um ponto de inflexão.