Derivada

Derivadas implícitas, da função inversa e sucessivas

Derivadas implícitas

Até aqui estudamos as funções em que a variável dependente y é dada explicitamente em termos da variável independente x através de uma relação $y = f(x)$. Por exemplo, a função quadrática

$$y = x^2 + 3x - 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

Há funções, contudo, que são definidas implicitamente através de uma equação da forma $F(x, y) = 0$ envolvendo as variáveis x e y. Um exemplo simples é a equação da circunferência de raio 1 dada como $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Nesse caso é possível resolver a equação em y e obtém-se as funções:

$$y = \sqrt{1 - x^2}\ ,\ x \in [-1,1] \ \text{ e } \ y = -\sqrt{1 - x^2},\ x \in [-1,1].$$

Derivadas implícitas

Há equações mais complicadas onde a resolução explícita de y em termos de x não é simples ou possível como é o caso da equação

$$2xy^2 + \cos(xy) + 1 = 0\,.$$

O objetivo da regra de derivação implícita é o de calcular a derivada da y, como função de x, quando y é dada implicitamente.

A regra consiste em derivar os dois membros da equação em relação a x usando a regra da cadeia quando preciso e, em seguida, isolar o termo y'.

Exemplos

Exemplo 15. Calcular y', sendo:

a) $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

b) $2xy^2 + \cos(xy) + 1 = 0$.

Resolução:

a) Derivando os dois membros da equação (a) em relação a x obtemos $2x + 2yy' = 0$.

Isolando o termo y', obtém-se que $2yy' = -2x$.

Suponha que existe um intervalo onde y é derivável e onde $y \neq 0$, segue que $y' = -\frac{x}{y}$.

b) Derivando os dois membros da equação (b) em relação a x obtemos $2y^2 + 2x2yy' - \text{sen}\,(xy)[y + xy'] = 0$.

Isolando o termo y': $y' = \frac{-2y^2 - y\text{sen}(xy)}{4xy + x\text{sen}(xy)}$.

Também nesse caso pressupõe-se a existência de um intervalo onde y é derivável e $x \neq 0$ e $4y + \text{sen}(xy) \neq 0$.

Exemplos

36) Encontre a derivada da função definida implicitamente por $2x^2 - y^3 - 1 = 0$.

Resolução. Vamos derivar ambos os lados da equação em relação a x. Como y é uma função de x (y é a função implícita!), devemos usar a regra da cadeia para derivar y^3. Temos:

$$4x - 3y^2y' - 0 = 0 \Rightarrow y' = \frac{4x}{3y^2}.$$

Exemplos

37) Calcule a derivada da função $y = f(x)$, definida pela equação: $\operatorname{sen} y + e^x \cos y = x - y^2$.

Resolução. Derivando ambos os membros da equação em relação a x: $\cos y \cdot y' + e^x \cos y - e^x \operatorname{sen} y \cdot y' = 1 - 2yy'$. Isolando y':

$$y'(\cos y - e^x \operatorname{sen} y + 2y) = 1 - e^x \cos y$$

$$\Rightarrow \ y' = \frac{1 - e^x \cos y}{\cos y - e^x \operatorname{sen} y + 2y}.$$

Tarefa 7

Resolver os seguintes exercícios, digitalizar e enviar no moodle grupos.

1) Dadas as equações, determinar $\frac{dx}{dy}$, a derivada de y em relação a x.

$a) x^3 + y^3 = 8$

$b) 4x^2 - 9y^2 = 17$

$c) \cos(x+y) + sen(x+y) = \frac{1}{3}$

Derivada da função inversa

Seja $y = f(x)$ uma função que admite inversa e é derivável no intervalo I e tal que $f'(x) \neq 0, \forall x \in I$. Então, a função inversa $f^{-1}(y)$ é derivável em todo $y \in f(I)$ e

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \tag{4.13}$$

onde a derivada $f'(x)$ deve ser calculada em $x = f^{-1}(y)$.

Exemplos

Exemplo 9. Determine a derivada da inversa da função $f:(0,\ \infty)\to(0,\ \infty), f(x)=x^3$.

Resolução: A inversa da f é a função $x=f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y},\ y\in(0,\infty)$. Ademais, $f'(x)\neq 0$ para todo x. Aplicando a regra (4.13), temos que $(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}=\dfrac{1}{3x^2}=\dfrac{1}{3(\sqrt[3]{y})^2}$.

Exemplos

15) Seja $f(x) = x^3 - 8$ e g a inversa de f. Determine $g'(x)$.

Resolução. Conforme o Teorema 28, $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{3x^2}$. Agora é preciso escrever x em função de y, pois lembre-se de que $x = g(y)$. Mas $y = f(x) = x^3 - 8 \Leftrightarrow x^3 = y + 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y+8}$.

Logo, $g'(y) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(y+8)^2}}$.

Resposta. $g'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+8)^2}}$.

Exemplos

16) Seja $f(x)=3(x+2)^5+6$ e g a inversa de f. Determine $g'(x)$.

Resolução. Temos $f'(x)=15(x+2)^4$. Pelo Teorema 28,

$$g'(y)=\frac{1}{15(x+2)^4}.$$

Vamos escrever essa expressão em função de y:

$$y=3(x+2)^5+6 \Leftrightarrow (x+2)^5=\frac{y-6}{3} \Leftrightarrow x+2=\sqrt[5]{\frac{y-6}{3}}.$$

Logo, $g'(y)=\dfrac{1}{15\sqrt[5]{\left(\dfrac{y-6}{3}\right)^4}}=\dfrac{1}{15}\sqrt[5]{\left(\dfrac{3}{y-6}\right)^4}$.

Resposta. $g'(x)=\dfrac{1}{15}\sqrt[5]{\left(\dfrac{3}{x-6}\right)^4}$.

Exemplos

17) Seja $f:[-3,0]\to[2,11]$; $f(t)=t^2+2$. Determine $g'(t)$, sendo $g=f^{-1}$.

Resolução. Faça um gráfico de f e verifique que f é de fato inversível.

Pelo Teorema 28, $g'(y)=\dfrac{1}{f'(t)}=\dfrac{1}{2t}$. Mas

$$y=t^2+2 \Leftrightarrow t^2=y-2 \Leftrightarrow t=\pm\sqrt{y-2}\cdot$$

Precisamos decidir se $t=+\sqrt{y-2}$ ou se $t=-\sqrt{y-2}$. Como $t\in[-3,0]$, t é negativo (lembre também que a imagem de f^{-1} é o domínio de f). Logo, $t=-\sqrt{y-2}$ e $g'(y)=\dfrac{-1}{2\sqrt{y-2}}$.

Resposta. $g'(t)=\dfrac{-1}{2\sqrt{t-2}}$; $t\in(2,11]$.

Tarefa 8

Resolver os seguintes exercícios, digitalizar e enviar no moodle grupos.

2) Determine a inversa das funções:

a) $f(x) = x^3 - 8$

b) $f(x) = 3(x + 2)^5 + 6$

Derivadas sucessivas

Suponha que f é uma função derivável no intervalo I. Se a função $f'(x)$, também chamada de derivada primeira de $f(x)$, é derivável no mesmo intervalo, então existe a função derivada de $f'(x)$, indicada como $f''(x)$ que é chamada de derivada segunda de $f(x)$. Diz-se então que $f(x)$ é duas vezes derivável.

Seguindo esse procedimento sucessivamente e, supondo que $f(x)$ é n vezes derivável, obtém-se a função derivada n-ésima, ou de ordem n, de $f(x)$ indicada como $f^{(n)}(x)$. As funções $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$, são as derivadas sucessivas de $f(x)$.

Exemplos

Exemplo 14. Seja $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1,\ x \in \mathbb{R}$. Aplicando as regras de derivação vistas, obtemos:

- $f\,'(x) = 3x^2 + 4x + 1\,,\ x \in \mathbb{R}$
- $f\,''(x) = 6x + 4\,,\ x \in \mathbb{R}$
- $f^{(3)}(x) = 6\,,\ x \in \mathbb{R}$
- $f^{(n)}(x) = 0\,,\ \forall n \geq 4\,,\ x \in \mathbb{R}$

Tarefa 9

Resolver os seguintes exercícios, digitalizar e enviar no moodle grupos.

4) Seja $f(x) = x^4 + 3x^2 - 1$. Obtenha $f''(x), f'''(x), f^{(IV)}(x)$ e $f^{(n)}(x)$ para n qualquer.