Lista 4, Ex. 2

Prof. Ivan

Janeiro 2021

Fixamos conjuntos não-vazios M, I e uma família $D = (d_i)_{i \in I}$ de semimétricas.

Para cada $x \in M$, $J \subset I$ finito e não-vazio, e cada $\varepsilon > 0$, definimos a vizinhaça básica de x

$$V_{J,\varepsilon}(x) = \{y \in M \,:\, d_j(y,x) < \varepsilon, \forall j \in J\}.$$

Um subconjunto $U \subset M$ é aberto se para todo $x \in U$ existe uma vizinhança básica de x contida em U. Denotamos por τ_D a coleção desses abertos.

1 Questão 2.a

É imediato que $M \in \tau_D$, e está claro que $\emptyset \in \tau_D$ por vacuidade.

Seja $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma coleção de elementos em τ_D, e considere $U := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.

Dado $x \in U$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ com $x \in U_{\lambda_0}$. Portanto, existe uma vizinhança básica $V_{J,\varepsilon}(x) \subset U_{\lambda_0} \subset U$. Como x é arbitrário, U é aberto.

Finalmente, dados $U_1, U_2 \in \tau_D$, seja $x \in U_1 \cap U_2$. Ora, existem $J_\ell \subset I$ finito e não-vazio, e $\varepsilon_\ell > 0$ com

$$V_{J_\ell, \varepsilon_\ell}(x) \subset U_\ell. \quad (\ell = 1, 2).$$

Então, claramente $V_{J_1 \cup J_2, min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}}(x) \subset U_1 \cap U_2$ é uma vizinhança básica de x. Portanto, $U_1 \cap U_2$ é aberto.

2 Questão 2.b

Seja $y \in V_{J,\varepsilon}(x)$, e escreva $\delta := max\{d_i(y,x) \,:\, i \in J\}$. Note que $\delta < \varepsilon$.

Seja $z \in V_{J,\varepsilon-\delta}(y)$. Então temos, para cada $j \in J$,

$$\begin{array}{rcl} d_j(z,x) & \leq & d_j(z,y) + d_j(y,x) \\ & < & (\varepsilon - \delta) + \delta = \varepsilon \\ & \Rightarrow & z \in V_{J,\varepsilon}(x), \end{array}$$

onde usamos a desigualdade triangular na primeira linha. Concluímos que $V_{J,\varepsilon-\delta}(y) \subset V_{J,\varepsilon}(x)$, ou seja cada vizinhança básica é de fato aberto de τ_D.

3 Questão 2.c

Sejam $(x_n) \subset M$ e $x_0 \in M$.

($\Longrightarrow$)
Suponha que $x_n \to x_0$ em τ_D, e fixe $i_0 \in I$.

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como vimos no item anterior, $V_{\{i_0\},\varepsilon}(x_0)$ é um aberto de τ_D contendo x_0. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo natural $n \geq n_0$, $x_n \in V_{\{i_0\},\varepsilon}(x_0)$, o que significa precisamente que

$$d_{i_0}(x_n, x_0) < \varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

Concluímos que $d_{i_0}(x_n, x_0) \to 0$ como desejado.

($\Longleftarrow$)

Suponhamos que $d_i(x_n, x_0) \to 0$ para cada $i \in I$. É suficiente mostrar que para uma vizinhança básica genérica $V_{J,\varepsilon}(x_0)$ de x_0, os termos x_n entrarão eventualmente nesta. Fixe-a, portanto; escreva $J = \{j_1, \dots, j_k\}$.

Para cada $\ell \in \{1, \dots, k\}$, podemos escolher um número natural $n_\ell \in \mathbb{N}$ de modo que para todo natural $n \geq n_\ell$ tenhamos

$$d_{j_\ell}(x_n, x_0) < \varepsilon,$$

já que $d_{j_\ell}(x_n, x_0) \to 0$. Portanto, se fixamos $n_0 := max\{n_1, \dots, n_k\}$, teremos que para todo natural $n \geq n_0$, $x_n \in V_{J,\varepsilon}(x_0)$, como desejado.

4 Questão 2.d

Suponha que (M, τ_D) é Hausdorff, e sejam $x \neq y$ pontos de M. Existem $J, J' \subset I$ conjs. finitos e não-vazios, e números $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ tais que

$$V_{J,\varepsilon}(x) \cap V_{J',\varepsilon'}(y) = \emptyset.$$

Em particular, para algum $j \in J$, temos que ter $d_j(y, x) \geq \varepsilon > 0$. Isto estabelece que D é separante.

Reciprocamente, sendo D separante, dados $x \neq y$ em M existe $i_0 \in I$ tal que $d_{i_0}(x, y) > 0$. Ponha $\varepsilon_0 := \frac{d_{i_0}(x,y)}{2}$, e $J_0 := \{i_0\}$. Então, dado $z \in V_{J_0,\varepsilon_0}(y)$, temos

$$2\varepsilon_0 = d_{i_0}(x, y) \leq d_{i_0}(x, z) + d_{i_0}(z, y) < d_{i_0}(x, z) + \varepsilon_0 \Rightarrow \varepsilon_0 < d_{i_0}(x, z),$$

e portanto $z \notin V_{J_0,\varepsilon_0}(x)$. Concluímos que

$$V_{J_0,\varepsilon_0}(x) \cap V_{J_0,\varepsilon_0}(y) \equiv \emptyset,$$

e daí que (M, τ_D) é Hausdorff.