NOÇÕES DE LIMITE E CONTINUIDADE

Limites Fundamentais & Funções Contínuas

Limites Fundamentais

Teorema 3.10. Primeiro Limite Fundamental

É conhecido como o limite trigonométrico fundamental dado por $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x}{x}=1$. Este limite pode ser apresentado também por $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\text{sen}\,x}=1$. Não é difícil de observar que $\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg}\,x}{x}=1$ é também um limite fundamental, para isto basta usar a relação trigonométrica $\text{tg}\,x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos\,x}$ e aplicar o limite trigonométrico fundamental acima.

Exemplos

Exemplo 1. Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 5x}{x}$.

Resolução: Calculando o limite do numerador e do denominador chegamos à indeterminação $\frac{0}{0}$. Para levantar esta indeterminação, vamos multiplicar e dividir a função $f(x)$ por 5, ou seja,

$$\frac{\text{sen } 5x}{x} = \frac{5}{5} \cdot \frac{\text{sen } 5x}{x} = \frac{5 \cdot \text{sen } 5x}{5x}.$$

Agora fazendo a mudança de variável, isto é, fazendo $5x = t$, vem

$\frac{\text{sen } 5x}{x} = \frac{5 \cdot \text{sen } t}{t}$. Observe em $5x = t$, quando $x \to 0$, $t \to 0$ e o limite dado passa de $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 5x}{x}$ para $\lim_{t \to 0} 5 \cdot \frac{\text{sen } t}{t}$, ou seja,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 5x}{x} = \lim_{t \to 0} 5 \cdot \frac{\text{sen } t}{t} = \lim_{t \to 0} 5 \cdot \lim_{t \to 0} \frac{\text{sen } t}{t} = 5 \cdot 1 = 5.$$

Portanto, $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 5x}{x} = 5$.

Exemplos

Exemplo 2. Determinar $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\sec x}{\sec x-1}$.

Resolução: Calculando o limite do numerador e do denominador chegamos à indeterminação $\dfrac{0}{0}$, para levantá-la vamos utiliza a relação trigonométrica $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ e temos:

$$\frac{x^2\cdot\sec x}{\sec x-1}=\frac{x^2\cdot\dfrac{1}{\cos x}}{\dfrac{1}{\cos x}-1}$$

$$\frac{x^2\cdot\sec x}{\sec x-1}=\frac{x^2\cdot\dfrac{1}{\cos x}}{\dfrac{1}{\cos x}-1}$$

$$=\frac{\dfrac{x^2}{\cos x}}{\dfrac{1-\cos x}{\cos x}}$$

$$=\frac{\dfrac{x^2}{\cos x}}{\dfrac{1-\cos x}{\cos x}}$$

Exemplos

Assim, o limite dado passa de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\sec x}{\sec x-1}$ para $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$, ou seja, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\sec x}{\sec x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$

Em $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$ calculando o limite do numerador e do denominador chegamos à indeterminação $\dfrac{0}{0}$ e para levantá-la vamos multiplicar e dividir $\dfrac{x^2}{1-\cos x}$ por $1+\cos x$ e o limite dado passa de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\sec x}{\sec x-1}$ para $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}\cdot\dfrac{1+\cos x}{1+\cos x}$,

ou seja, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sec x}{\sec x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}\cdot\dfrac{1+\cos x}{1+\cos x}$,

Exemplos

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot (1+\cos x)}{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x)},$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot (1+\cos x)}{1^2 - (\cos x)^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot (1+\cos x)}{(\operatorname{sen} x)^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{(\operatorname{sen} x)^2} \cdot (1+\cos x)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x} \right)^2 \cdot \lim_{x \to 0} (1+\cos x) \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\operatorname{sen} x} \right)^2 \cdot \lim_{x \to 0} (1+\cos x)$$

$$= \left(\lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \right)^2 \cdot (\lim_{x \to 0} 1 + \lim_{x \to 0} \cos x)$$

$$= 1^2 \cdot (1+\cos 0) = 2.$$

Portanto, $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot \sec x}{\sec x - 1} = 2.$

Limites Fundamentais

Teorema 3.11. Segundo Limite Fundamental

Este limite é conhecido como o limite exponencial fundamental e dado por $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ onde $e = 2{,}718281\ldots$ é a constante de Euler, que é um número irracional e é também a base dos logaritmos naturais ou neperianos.

O limite exponencial fundamental também é dado por

$\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$

(Obtenha-o a partir do limite acima fazendo uma mudança de variável).

Este limite fundamental será utilizado para levantar uma indeterminação do tipo 1^{∞}.

Exemplos

Exemplo 1. Determinar $\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x$.

Resolução: Se tentarmos calcular este limite usando os teoremas sobre limites de funções, seção 3.2, chegamos à indeterminação 1^∞ e para levantá-la, vamos substituir em $\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x$, $\frac{5}{x}$ por t, ou seja, $\frac{5}{x}=t$ e x por $\frac{5}{t}$, ou seja, $x=\frac{5}{t}=\frac{1}{t}\cdot 5$.

Observe, quando $x \to +\infty, \frac{1}{x} \to 0,\ 5\cdot\frac{1}{x} \to 0$ e $t \to 0$. (pelo Teorema 3.7)

Assim, o limite dado passa de $\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x$ para $\lim_{x \to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}\cdot 5}$, ou seja, $\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x = \lim_{t \to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}\cdot 5} = \left[\lim_{t \to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^5 = e^5$.

Pelo limite exponencial fundamental.

Portanto, $\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x = e^5$.

Exemplos

Exemplo 2. Calcular $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5}$.

Resolução: Aqui temos também a indeterminação 1^{∞}. Para levantar esta indeterminação utilizaremos a propriedade de Potências $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$ e escrevemos $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5}$ da seguinte maneira $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5}=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5}$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
&=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5}\right].\\
&=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^{5}\\
&=e\cdot(1+0)^5=e.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5}=e.$

Exemplos

Exemplo 3. Calcular $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$.

Resolução: Temos aqui a indeterminação 1^∞.

Para levantar esta indeterminação vamos em $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$ dividir o numerador e o denominador por x e temos

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\left[\frac{\frac{x}{x}}{\frac{x+1}{x}}\right]^x=\left[\frac{1}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}\right]^x$$

$$=\left[\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right]^x=\frac{1^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}.$$

Exemplos

Assim,

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}.$$

Passando ao limite, quando $x \to +\infty$, ambos os membros da equação acima vem

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$

$$= \frac{\lim_{x\to+\infty} 1}{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e} = e^{-1}.$$

Portanto, $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = e^{-1}$.

Limites Fundamentais

Teorema 3.12. Terceiro Limite Fundamental

Este limite é dado por $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, para $a > 0$, $a \neq 1$. É utilizado para levantar indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Vejamos aplicações diretas deste limite fundamental. Para calcular $\lim_{x \to 0} \frac{10^x - 1}{x}$ neste caso $a = 10$ e $\lim_{x \to 0} \frac{10^x - 1}{x} = \ln 10$. Para calcular $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$, observe que $a = e$, logo $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1$.

Exemplos

Exemplo 1. Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{5^{x+3} - 125}{x}$.

Resolução: Como $\lim_{x \to 0} 5^{x+3} - 125 = 0$, temos aqui a indeterminação $\frac{0}{0}$.

Para levantar esta indeterminação sabemos que

$5^{x+3} = 5^x \cdot 5^3$, pela propriedade, $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, logo,

$$\lim_{x \to 0} \frac{5^{x+3} - 125}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{5^x \cdot 5^3 - 5^3}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{5^3 \cdot (5^x - 1)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} 5^3 \cdot \frac{5^x - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} 5^3 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{5^x - 1}{x}$$

$$= 5^3 \cdot \ln 5 = 125 \cdot \ln 5.$$

Portanto, $\lim_{x \to 0} \frac{5^{x+3} - 125}{x} = 125 \cdot \ln 5$.

Exemplos

Exemplo 2. Determinar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{16 - 4^{x+2}}{x}$.

Resolução: Como $\lim\limits_{x \to 0} 16 - 4^{x+2} = 0$ a indeterminação aqui presente é $\dfrac{0}{0}$. Para levantar esta indeterminação, vamos usar o mesmo raciocínio do exemplo 1 e temos

$$\lim_{x \to 0} \frac{16 - 4^{x+2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{4^2 \cdot (1 - 4^x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{4^2 (1 - 4^x)}{x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(4^2 \cdot \frac{1 - 4^x}{x} \right) = 4^2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{-4^x + 1}{x}$$

$$= 16 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{-(4^x - 1)}{x} = 16 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{(-1) \cdot (4^x - 1)}{x}$$

$$= 16 \cdot \lim_{x \to 0} (-1) \cdot \frac{4^x - 1}{x} = 16 \cdot (-1) \cdot \lim_{x \to 0} \frac{4^x - 1}{x}$$

$$= 16 \cdot (-1) \cdot \ln 4 = 16 \cdot (-1) \cdot \ln 2^2$$

$$= -16 \cdot 2 \cdot \ln = -32 \cdot \ln 2.$$

(Lembre que $\ln A^n = n \cdot \ln A$).

Portanto, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{16 - 4^{x+2}}{x} = -32 \cdot \ln 2$.

Tarefa 6

Resolver os seguintes exercícios, digitalizar e enviar no moodle grupos.

8. Calcular os limites seguintes:

a) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

Funções Contínuas

Definição 3.6. Seja f uma função definida em um conjunto X constituído de uma reunião de intervalos e seja $a \in X$. Diz-se que a função f é contínua no ponto a quando $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

- A maior parte das funções elementares são contínuas em todo x real. Por exemplo: $f(x) = c$, $f(x) = ax + b$, $f(x) = sen\, x$ e $f(x) = \cos x$.

Definição 3.7. Seja $a \in \operatorname{Dom} f$ diz-se que uma função f é descontínua no ponto $x = a$ se f não for contínua em $x = a$.

- Isto significa que f é descontínua em $x = a$ se ocorrer ao menos uma das seguintes condições:

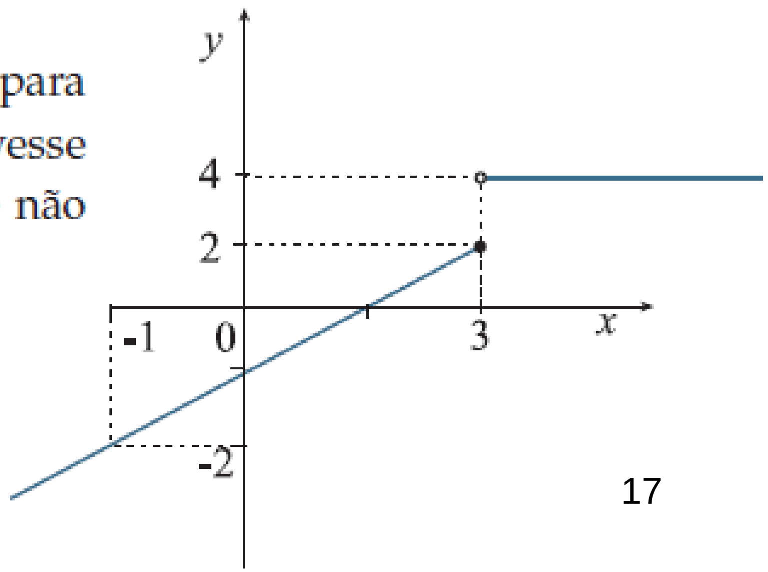
Funções Contínuas

i) Não existe $\lim_{x \to a} f(x)$.

Exemplo: Seja $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \leq 3 \\ 4, & \text{se } x > 3 \end{cases}$.

A função $f(x)$ é descontínua no ponto $x = 3$, pois, $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (x-1) = 3-1 = 2$ e $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} 4 = 4$, logo não existe $\lim_{x \to 3} f(x)$.

Observe que $f(3) = 3-1 = 2$, mas isto não é suficiente para a continuidade de $f(x)$. Seria necessário que se tivesse $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$ o que jamais poderia ocorrer visto que não existe $\lim_{x \to 3} f(x)$. Veja o gráfico de $f(x)$ a seguir.



Funções Contínuas

ii) Existe $f(a)$, mas $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.

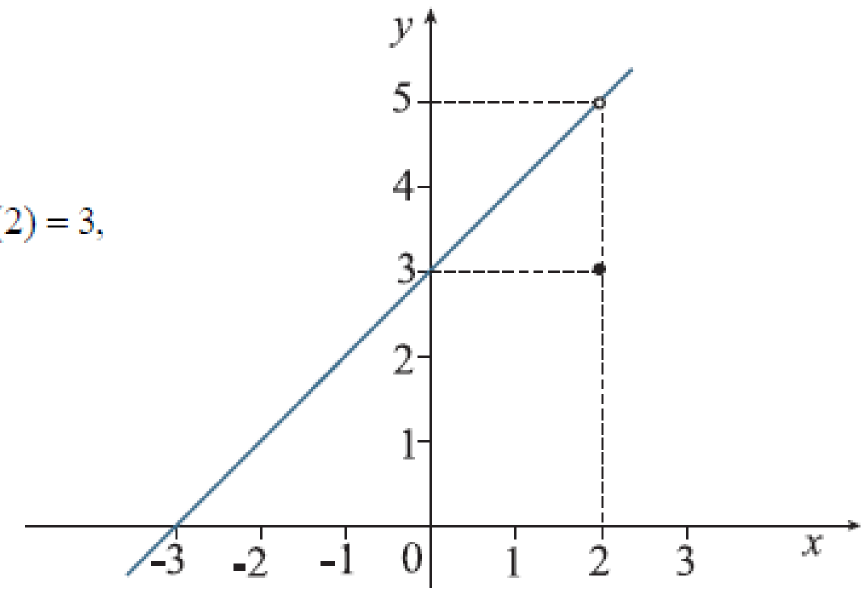
Exemplo: A função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+3)\cdot(x-2)}{(x-2)}, & \text{se } x \neq 2 \\ 3, & \text{se } x = 2 \end{cases}$

A função $f(x)$ é descontínua no ponto $x = 2$, pois,

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{(x+3)\cdot(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2}(x+3) = 2+3 = 5 \; e \; f(2) = 3,$$

isto é, $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$.

Veja o gráfico de $f(x)$ na figura



Funções Contínuas

Definição 3.8. Uma função f é contínua no conjunto X se f é contínua em todos os pontos de X.

Por exemplo, as funções $f(x) = \text{tg}\, x$ e $g(x) = \text{sen}\, x$ são contínuas nos intervalos $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, respectivamente.

Vamos estudar agora os teoremas elementares de funções contínuas, tais como: soma, produto, quociente e composição.

Funções Contínuas

Teorema 3.13. Se as funções $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas em $x = a$, então:

1) A soma, $f(x) + g(x)$, é contínua em $x = a$;

2) A diferença, $f(x) - g(x)$ é contínua em $x = a$;

3) O produto, $f(x) \cdot g(x)$, , é uma função contínua em $x = a$;

4) O quociente, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, é uma função contínua $x = a$, desde que se tenha $g(a) \neq 0$.

Funções Contínuas

Teorema 3.14. A composição, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ é contínua em $x = a$, desde que $g(x)$ seja contínua em $x = a$ e $f(x)$ seja contínua em $g(a)$.

Observação 1. A função polinomial $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ é contínua em $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Observação 2. Uma função racional é contínua em todo número real de seu domínio.

Observação 3. As funções abaixo são contínuas em todo número real x de seu domínio:

$$f(x) = a^x,\ g(x) = \log_a x\ ,\ h(x) = \sqrt{x}.$$

Exemplos

Vejamos alguns exemplos de funções contínuas pelo Teoremas 3.13 e 3.14.

Exemplo 1. As funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 3x$ são contínuas para todo número real x, logo, $(f + g)(x) = x^2 + 3x$ é contínua para todo número real x.

Exemplo 2. As funções $f(x) = x + 1$ e $g(x) = \cos x$ são contínuas para todo número real x, logo, $(f \cdot g) \cdot (x) = (x+1) \cdot \cos x$ é contínua para todo número real x.

Exemplos

Exemplo 3. As funções $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2 + 1$ são contínuas para todo número real x, logo, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3}{x^2+1}$ é contínua para todo número real x.

Exemplo 4. A função $f(x) = 2x^5 - x^3 + 3\,x^2 - 1$ é contínua para todo número real x.

Exemplo 5. As funções $f(x) = 2\,x + 1$ e $g(x) = 2\,x$ são contínuas para todo número real x, logo $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2\,x) = 4\,x + 1$, isto é, $(f \circ g)(x) = 4\,x + 1$ é contínua para todo número real x.

Exemplos

Exemplo 1. Verificar se a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 7x - 6, & \text{se } x < 2 \\ 2x^2, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$ é contínua em $x = 2$.

Resolução: Vamos verificar se $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$. Inicialmente observe que $f(x) = 2\,x^2$ para $x \geq 2$, assim $f(2) = 2 \cdot 2^2 = 2 \cdot 4 = 8$, ou seja, $f(2) = 8$. Agora, vamos calcular os limites laterais e temos $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+}(2x^2) = 2 \cdot 2^2 = 8$ e $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-}(7x - 6) =$ $7 \cdot 2 - 6 = 8$, ou seja, $\lim_{x \to 2} f(x) = 8 = f(2)$.

Portanto, $f(x)$ é contínua em $x = 2$.

Exemplos

Exemplo 2. Analisar se a função f definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3}, & \text{se } x\neq 3\\ 5, & \text{se } x=3\end{cases}$$ é contínua em $x=3$.

Resolução: Precisamos verificar se $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$.

É fácil observar que em $x=3$ a função $f(x)$ vale 5, isto é, $f(3)=5$.

Agora, calculando o limite de $f(x)$ quando $x\to 3$, temos

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\cdot(x+3)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}(x+3)=3+3=6.$$

Como $\lim_{x\to 3} f(x) = 6$ é diferente de $f(3)=5$, a função $f(x)$ não é contínua em $x=3$.

Exemplos

Exemplo 3. Verificar se a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\, x}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 2, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$ é contínua em $x = 0$.

Resolução: Vamos verificar se $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

Não é difícil de observar que $f(0) = 2$, isto é, quando $x = 0$ f vale 2. Agora, calculando $\lim_{x \to 0} f(x)$ temos $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \dfrac{sen\ x}{x} = 1$ (Primeiro limite trigonométrico fundamental).

Como $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ é diferente de $f(0) = 2$, a função f não é contínua em $x = 0$.

Tarefa 7

Resolver os seguintes exercícios, digitalizar e enviar no moodle grupos.

9. Verificar se a função definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, se\ x \neq 1 \\ 2, \quad se\ x = 1 \end{cases}$ é contínua em $x = 1$.