NOÇÕES DE LIMITE E CONTINUIDADE

Limites no Infinito & Limites Infinitos

Limites no Infinito

Consideremos a seguinte função:

$$f(x) = \frac{3x + 1}{x + 1}, \text{ para } x \neq 1$$

Observe a tabela:

x	0	1	2	4	5	10	100	1000	10000
$f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$	1	2	2,31	2,6	2,67	2,98	2,98	2,998	2,9998

À medida que x cresce através de valores positivos, observamos que os valores da função $f(x)$ se aproximam cada vez mais de 3. Logo, pode-se dizer que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{3x + 1}{x + 1} = 3$$

Limites no Infinito

Definição 3.4. Seja $f(x)$ uma função definida em todo número real de um intervalo $(a, +\infty)$. O limite de $f(x)$, quando x cresce ilimitadamente, é L, e escreve-se $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, se para qualquer $\varepsilon > 0$, existir um número $T > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x > T$.

Limites no Infinito

Consideremos novamente a seguinte função:

$$f(x) = \frac{3x + 1}{x + 1}, \text{ para } x \neq 1$$

Observe a tabela:

x	-1,5	-2	-3	-5	-10	-100	-1000	-10000	...
$f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$	-7	5	4	3,5	3,222	3,0202	3,0020	3,0002	...

Observamos que, à medida em que os valores de x decrescem ilimitadamente, $f(x)$ aproxima-se cada vez mais de 3. Logo, podemos afirmar que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x + 1}{x + 1} = 3$$

Limites no Infinito

Definição 3.5. Seja $f(x)$ uma função definida em todo número real de um intervalo $(-\infty, a)$. O limite de $f(x)$, quando x decresce ilimitadamente, é L, e escreve-se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, se para qualquer $\varepsilon > 0$, existir um número $T < 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x < T$.

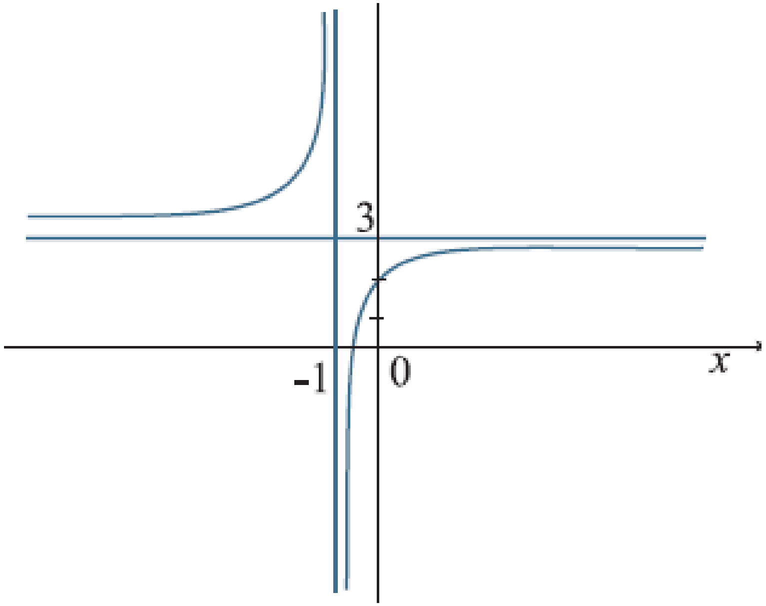
Assim, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x+1}{x+1} = 3$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x+1}{x+1} = 3$, veja o gráfico de $f(x)$ a seguir.

Limites no Infinito

Observe atentamente pelo gráfico que $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$.

Teorema 3.7. Se n é um número positivo qualquer, então

i) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$; ii) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.



Exemplos

Exemplo 1. Determinar o valor de $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7x + 2}{\sqrt{5x^2 - 3}}$.

Resolução: Se no cálculo deste limite você tentar utilizar o item d do Teorema 3.3 (que se aplica somente quando $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M \neq 0$, com $L, M \in \mathbb{R}$ o que não ocorre aqui), você chegará à indeterminação $\dfrac{\infty}{\infty}$. Para levantar esta indeterminação, divida o numerador e o denominador de $f(x)$ por x, para x maior que zero, pois os valores x devem ser considerados positivos.

Assim,

Exemplos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x+2}{\sqrt{5x^2-3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7x+2}{x}}{\frac{\sqrt{5x^2-3}}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7x+2}{x}}{\sqrt{\frac{5x^2-3}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7x}{x}+\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{3}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{7+\frac{2}{x}}{\sqrt{5-\frac{3}{x^2}}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7+\frac{2}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{5-\frac{3}{x^2}}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5-\frac{3}{x^2}\right)}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}7+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}}{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}5-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}7+\lim\limits_{x\to\infty}\left(2\cdot\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}5-\lim\limits_{x\to\infty}\left(3\cdot\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}7+\left(\lim\limits_{x\to\infty}2\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}5-\left(\lim\limits_{x\to\infty}3\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\right)}}$$

Exemplos

Pelo Teorema 3.7, $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ *e* $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$, calculando o limite quando $x \to \infty$, a expressão do lado direito da igualdade acima, fica $\frac{7 + 2 \cdot 0}{\sqrt{5 - 3 \cdot 0}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$.

Portanto, $\lim_{x \to \infty} \frac{7x + 2}{\sqrt{5x^2 - 3}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$.

Exemplos

Exemplo 2. Calcular $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{7x + 2}{\sqrt{5x^2 - 3}}$.

Resolução: Se no cálculo deste limite você tentar utilizar o item d do Teorema 3.3 (que se aplica somente quando $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M \neq 0$,com $L, M \in \mathbb{R}$ o que não ocorre aqui), você chegará à indeterminação $\dfrac{\infty}{\infty}$. Como no exemplo anterior, para levantar esta indeterminação, divida o numerador e o denominador da função $f(x)$ por x. Como x tende a menos infinito, os valores de x devem ser considerados negativos. Para o denominador vamos considerar $x = -\sqrt{x^2}$.

Assim,

Exemplos

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{7x+2}{\sqrt{5x^2-3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{7x+2}{x}}{\dfrac{\sqrt{5x^2-3}}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{7x+2}{x}}{\dfrac{\sqrt{5x^2-3}}{-\sqrt{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{7x+2}{x}}{-\sqrt{\dfrac{5x^2-3}{x^2}}}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x+2}{x}}{\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{\dfrac{5x^2-3}{x^2}}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x}{x}+\dfrac{2}{x}}{-\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{5x^2}{x^2}-\dfrac{3}{x^2}}}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(7+\dfrac{2}{x}\right)}{-\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{5-\dfrac{3}{x^2}}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}7+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x}}{-\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}5-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x^2}}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}7+\lim\limits_{x\to-\infty}2\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}5-\lim\limits_{x\to-\infty}3\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}}}$$

$$=\frac{7+2\cdot 0}{\sqrt{5-3\cdot 0}}=\frac{7}{-\sqrt{5}}=-\frac{7}{\sqrt{5}}.$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x+2}{\sqrt{5x^2-3}}=-\dfrac{7}{\sqrt{5}}$.

Exemplos

Exemplo 3. Determinar $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{4x^3 - 8x + 7}{6x^5 - 3}$.

Resolução: Para calcular este limite se você tentar utilizar o item d do Teorema 3.3 (que se aplica somente quando $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M \neq 0$, com $L, M \in \mathbb{R}$ e aqui isto não ocorre), você chegará à indeterminação $\dfrac{\infty}{\infty}$. Para levantar esta indeterminação, divida o numerador e o denominador da função $f(x)$ pela maior potência ou expoente da variável x, que no neste nosso caso é x^5.

Assim, $$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^3 - 8x + 7}{6x^5 - 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{4x^3 - 8x + 7}{x^5}}{\dfrac{6x^5 - 3}{x^5}}$$

Exemplos

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{4x^3}{x^5} - \frac{8x}{x^5} + \frac{7}{x^5}}{\frac{6x^5}{x^5} - \frac{3}{x^5}}$$

$$= \frac{\lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x^2} - \lim_{x \to -\infty} \frac{8}{x^4} + \lim_{x \to -\infty} \frac{7}{x^5}}{\lim_{x \to -\infty} 6 - \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x^5}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{4}{x^2} - \frac{8}{x^4} + \frac{7}{x^5}}{6 - \frac{3}{x^5}}$$

$$= \frac{\lim_{x \to -\infty} \left(4 \cdot \frac{1}{x^2}\right) - \lim_{x \to -\infty} \left(8 \cdot \frac{1}{x^4}\right) + \lim_{x \to -\infty} \left(7 \cdot \frac{1}{x^5}\right)}{\lim_{x \to -\infty} 6 - \lim_{x \to -\infty} \left(3 \cdot \frac{1}{x^5}\right)}$$

$$= \frac{\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{4}{x^2} - \frac{8}{x^4} + \frac{7}{x^5}\right)}{\lim_{x \to -\infty} (6 - \frac{3}{x^5})}$$

$$= \frac{4 \cdot \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} - 8 \cdot \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^4} + 7 \cdot \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^5}}{\lim_{x \to -\infty} 6 - 3 \cdot \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^5}}$$

Exemplos

Pelo Teorema 3.7, sabemos que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^4} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^5} = 0,$

assim $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x^3 - 8x + 7}{6x^5 - 3} = \frac{4 \cdot 0 - 8 \cdot 0 + 7 \cdot 0}{6 - 3 \cdot 0} = 0$.

Portanto, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x^3 - 8x + 7}{6x^5 - 3} = 0.$

Tarefa 4

Resolver os seguintes exercícios, digitalizar e enviar no moodle grupos.

6. Calcular os seguintes limites:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2+5x-4}{x^3+7x}$

Limites Infinitos

Consideremos a função definida por $f(x) = \frac{2}{(x-3)^2}$ para $x \neq 3$.

Queremos determinar os valores da função $f(x)$ quando x está próximo de 3. Para x se aproximando de 3 pela direita, $x > 3$, temos:

$x, x > 3$	4	3,5	3,25	3,125	3,1	3,01	3,001	...
$f(x) = \frac{2}{(x-3)^2}$	2	8	32	128	200	20.000	2.000.000	...

Fazendo x aproximar-se cada vez mais de 3, com $x > 3$, $f(x)$ cresce ilimitadamente.

Escreve-se $\lim_{x \to 3^+} \frac{2}{(x-3)^2} = +\infty$. Quando $x \to 3^+$, $f(x) \to +\infty$.

Limites Infinitos

Agora vamos considerar x se aproximando de 3 pela esquerda.

Para $x < 3$ obtém-se os valores de $f(x)$, dados na tabela a seguir.

$x, x < 3$	2	2,5	2,75	2,8	2,9	2,99	2,999	...
$f(x) = \dfrac{2}{(x-3)^2}$	2	8	32	50	2.000	20.000	2.000.000	...

Fazendo x aproximar-se cada vez mais de 3, com $x < 3$, $f(x)$ cresce ilimitadamente.

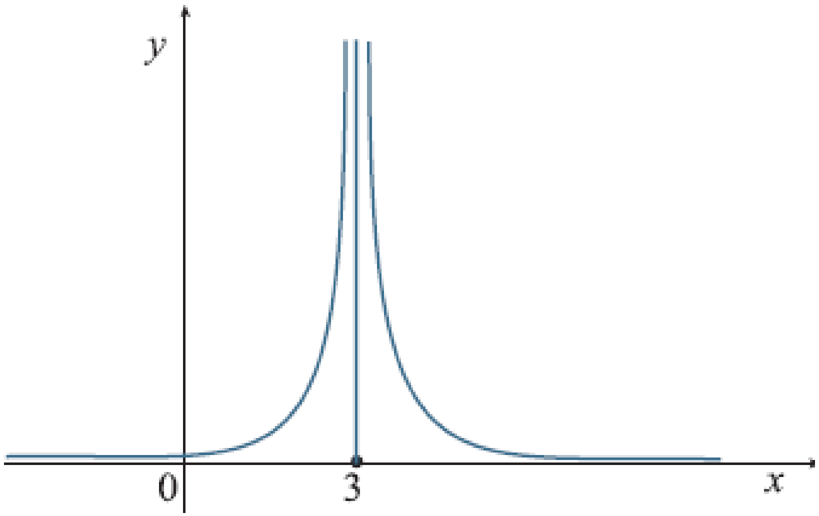
Escreve-se $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{2}{(x-3)^2} = +\infty$. Quando $x \to 3^-$, $f(x) \to +\infty$.

Limites Infinitos

Portanto, quando x se aproxima de 3 pela direita $(x > 3)$ ou pela esquerda $(x < 3)$, $f(x)$ cresce ilimitadamente e escreve-se

$$\lim_{x \to 3} \frac{2}{(x-3)^2} = +\infty.$$

Após estas considerações, veja o gráfico de $f(x) = \dfrac{2}{(x-3)^2}$ para $x \neq 3$ a seguir.



Limites Infinitos

Escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ para dizer que $f(x)$ cresce ilimitadamente quando x tende para a.

Se $f(x) < 0$ para x próximo de a e o módulo de $f(x)$ crescer ilimitadamente escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

De maneira análoga atribuímos significados para $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$.

Escrevemos $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ para dizer que $f(x)$ cresce ilimitadamente sempre que x crescer ilimitadamente.

De maneira análoga atribuímos significado para $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$.

Limites Infinitos

Teorema 3.8. Se n é um número natural, então

a) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$;

b) $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ par} \\ -\infty & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$.

Exemplos

Exemplo 1. Calcular $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^4}$.

Resolução: Neste caso $n = 4$ e pela letra a do teorema 3.8, temos

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^4} = +\infty.$$

Exemplo 2. Calcular $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^5}$.

Resolução: Agora $n = 5$, ímpar, pela letra b do teorema 3.8, vem

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^5} = -\infty.$$

Exemplos

Exemplo 3. Calcular $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^8}$.

Resolução: Como $n = 8$, par, pela letra b do teorema 3.8, temos,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^8} = +\infty .$$

Exemplo 4. Determinar $\lim_{x \to 0^+} \left(x^4 + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^6} \right)$.

Resolução: Usando os teoremas sobre limites e o teorema 3.8 vem

$$\lim_{x \to 0^+} \left(x^4 + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^6} \right) = \lim_{x \to 0^+} x^4 + \lim_{x \to 0^+} \sqrt[3]{x} + \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^6}$$

$$= 0 + 0 + \infty = +\infty.$$

Exemplos

Exemplo 5. Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} (5\,x^7 - 3\,x^5 + 2)$.

Resolução: Tentando aplicar o item a do Teorema 3.3 ao limite $\lim\limits_{x \to +\infty} (5\,x^7 - 3\,x^5 + 2)$ você chega à indeterminação $\infty - \infty$. Para levantá-la, vamos multiplicar e dividir a função dada por x^7 que é o termo de mais alto grau da função $f(x)$, e temos

$$\lim_{x \to +\infty} (5x^7 - 3x^5 + 2) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^7 \cdot (5x^7 - 3x^5 + 2)}{x^7}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x^7 \cdot \left(\frac{5x^7}{x^7} - \frac{3x^5}{x^7} + \frac{2}{x^7} \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x^7 \cdot \left(5 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^7} \right).$$

Exemplos

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^7}\right)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}5-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^2}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^7}\right)$

$$=\left(\lim_{x\to+\infty}5-\lim_{x\to+\infty}\left(3\cdot\frac{1}{x^2}\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(2\cdot\frac{1}{x^7}\right)\right)$$

$$=\left(\lim_{x\to+\infty}5-\lim_{x\to+\infty}3\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to+\infty}2\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^7}\right)$$

$$=5-3\cdot0+2\cdot0=5,$$

enquanto $\lim\limits_{x\to+\infty}x^7=+\infty$, tem-se $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x^7-3x^5+2)=+\infty$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x^7-3x^5+2)=+\infty$.

Exemplos

Exemplo 6. Determinar $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{3\,x^2}{x^2-4}$.

Resolução: O limite do numerador é $\lim_{x\to 2^+} 3x^2 = 3\cdot 2^2 = 3\cdot 4 = 12$ e o limite do denominador é

$$\lim_{x\to 2^+}(x-2)\cdot(x+2) = \lim_{x\to 2^+}(x-2)\cdot \lim_{x\to 2^+}(x+2)$$

$$= (2-2)\cdot(2+2) = 0\cdot 4 = 0$$

O limite do denominador é 0, e o denominador está se aproximando de 0 através de valores positivos, isto é, quando $x \to 2^+$ tem-se $x > 2$ e $x-2 > 0$. Logo, $x-2 \to 0$ por valores positivos e, assim a fração $\dfrac{3\,x^2}{x^2-4}$ é positiva e assume valores arbitrariamente grandes.

Portanto, $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{3\,x^2}{x^2-4} = +\infty$.

Tarefa 5

Resolver os seguintes exercícios, digitalizar e enviar no moodle grupos.

7. Calcular os limites seguintes:

a) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^5+3x^2+2x}{x^3-7x^2}$