NOÇÕES DE LIMITE E CONTINUIDADE

Noções de Limites & Teoremas

Noção de Limite

Considere a função f(x)=2x-3. O que ocorre com os valores de f(x), quando x assume valores próximos de 4?

Observe a tabela:

x	3,8	3,9	3,99		4,01	4,1	4,2
$f(x)$	4,6	4,8	4,98		5,02	5,2	5,4

Vemos nessa tabela que quanto mais próximo de 4 tomamos o ponto x, mais o valor f(x) se aproxima de 5. Diremos que o limite de f(x) quando x tende a 4 é 5.

Noção de Limite

Podemos fazer com que f(x) assuma valores tão próximos de 5 quanto desejarmos, desde que tomemos x suficientemente próximo de 4 ($x \neq 4$). Essa ideia pode ser traduzida matematicamente como

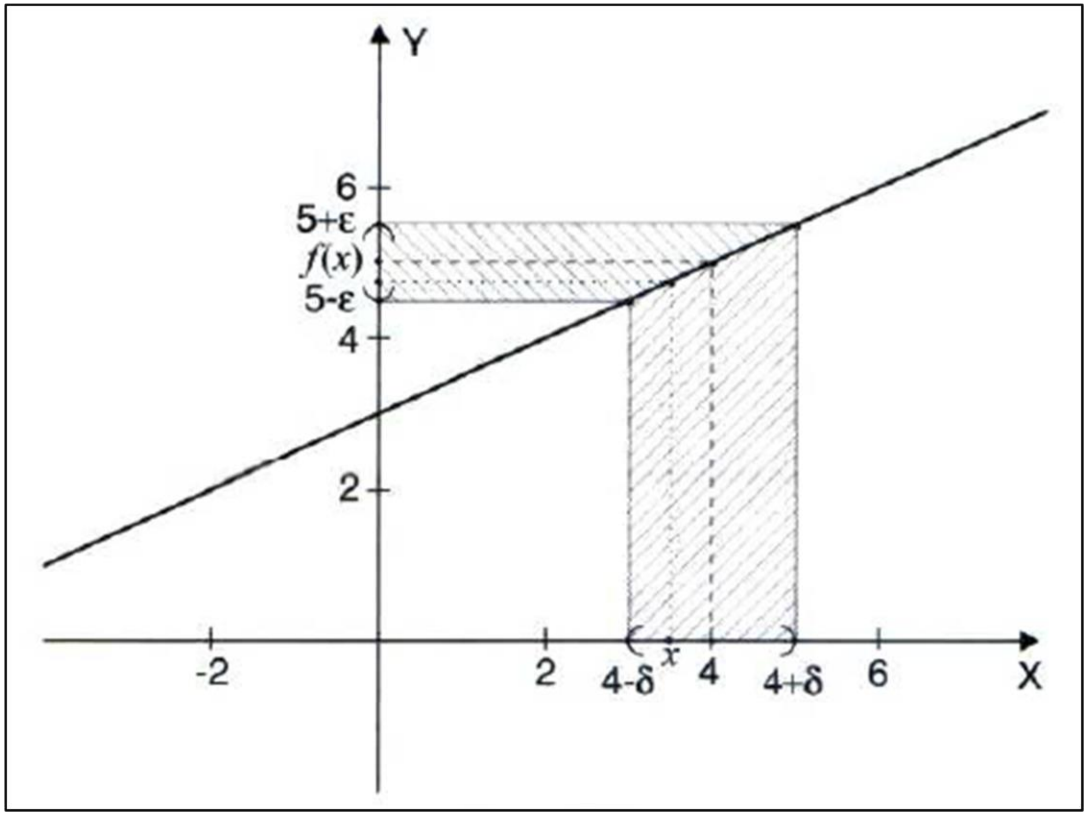
$$|f(x)-5|<\varepsilon$$

Sendo um ε um número positivo qualquer, tão pequeno quanto se possa imaginar.

Além disso, deve existir um intervalo aberto de raio $\delta>0$ e centro $a = 4$, tal que se x ($x \neq 4$) variar nesse intervalo (isto é, se $0<|x-4|<\delta$), então deve valer a desigualdade acima.

Noção de Limite

Observe o gráfico:



Noção de Limite

Definição:

Seja I um intervalo qualquer, $a \in I$ e $f(x)$ uma função definida no intervalo I, (exceto eventualmente em a). Diz-se que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L , e escreve-se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Teoremas sobre Limites

Teorema 3.1. Unicidade do limite

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} f(x) = M$ então $L = M$.

Teorema 3.2. Se $f(x) = k$ para todo x real, então para qualquer número real a, tem-se $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} k = k$.

Exemplo. Considere $f(x) = 4$ e $a = 2$ então $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} 4 = 4$.

Ou seja, o limite de uma constante é a própria constante.

Teoremas sobre Limites

Teorema 3.3. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$ então:

a) $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L \pm M.$

b) Para qualquer número real k, tem-se
$\lim_{x\to a}(k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x\to a} f(x) = k \cdot L.$

c) $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L \cdot M.$

d) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}$ *se* $M \neq 0.$

e) $\lim_{x\to a}(f(x))^n = (\lim_{x\to a} f(x))^n = L^n.$

Teoremas sobre Limites

Teorema 3.4. Se $\lim_{x \to a} f(x) = b$ e $\lim_{y \to b} g(y) = L$, com $L = g(b)$,

$\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(\lim_{x \to a} f(x))$.

Teorema 3.5 Sejam $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 1$, $b > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então:

a) $\lim_{x \to a} (\text{sen}\, f(x)) = \text{sen}(\lim_{x \to a} f(x)) = \text{sen}\, L$.

b) $\lim_{x \to a} (\cos f(x)) = \cos(\lim_{x \to a} f(x)) = \cos L$.

c) $\lim_{x \to a} b^{f(x)} = b^{\lim_{x \to a} f(x)} = b^L$.

d) $\lim_{x \to a} (\log_b f(x)) = \log_b (\lim_{x \to a} f(x)) = \log_b L$, para $L > 0$.

e) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, para todo n se $L \geq 0$ e só para n ímpar se $L < 0$.

Teoremas sobre Limites

Primeira Observação: $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$.

Exemplo: $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8$.

Segunda Observação: Seja $p(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ um polinômio qualquer, pelo teorema 3.3 a, 3.3 b e pela "Primeira Observação", você tem:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} p(x) &= \lim_{x\to a}(b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0) \\
&= \lim_{x\to a} b_n x^n + \lim_{x\to a} b_{n-1} x^{n-1} + \dots + \lim_{x\to a} b_1 x + \lim_{x\to a} b_0 \\
&= b_n \lim_{x\to a} x^n + b_{n-1} \lim_{x\to a} x^{n-1} + \dots + b_1 \lim_{x\to a} x + \lim_{x\to a} b_0 \\
&= p(a).
\end{aligned}$$

Logo, $\lim\limits_{x\to a} p(x) = p(a)$.

Teoremas sobre Limites

Usando a segunda observação, calcular os limites abaixo.

1) $\lim_{x \to 2}(2x^2 - 7x + 4) = 2 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 4 = 2 \cdot 4 - 7 \cdot 2 + 4 = 18.$

2) $\lim_{x \to 1}(x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 2) = 1^5 - 3 \cdot 1^4 + 2 \cdot 1^3 + 2 = 1 - 3 + 2 + 2 = 2.$

Exemplos

Exemplo 1. Calcular $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+7x-2}{3x-5}$.

Resolução: Pelo teorema 3.3, letra d e pelo Teorema 3.3 letras a e b, você tem:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+7x-2}{3x-5}=\frac{\lim_{x\to 1}(x^2+7x-2)}{\lim_{x\to 1}(3x-5)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 1}x^2+\lim_{x\to 1}7x-\lim_{x\to 1}2}{\lim_{x\to 1}3x-\lim_{x\to 1}5}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 1}x^2+\lim_{x\to 1}7\cdot\lim_{x\to 1}x-\lim_{x\to 1}2}{\lim_{x\to 1}3\cdot\lim_{x\to 1}x-\lim_{x\to 1}5}$$

$$=\frac{1^2+7\cdot 1-2}{3\cdot 1-5}=\frac{6}{-2}=-3.$$

Portanto, $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+7x-2}{3x-5}=-3$.

Exemplos

Exemplo 2. Calcular $\lim_{x\to 0}\left[(x-1)^{10}\cdot(x+5)\right]$.

Resolução: Inicialmente você aplica o Teorema 3.3 letra c depois o Teorema 3.3 letra e, vem

$$\lim_{x\to 0}\left[(x-1)^{10}\cdot(x+5)\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}(x-1)^{10}\cdot\lim_{x\to 0}(x+5)=\lim_{x\to 0}(x-1))^{10}\cdot\lim_{x\to 0}(x+5)$$

$$=(0-1)^{10}\cdot(0+5)=(-1)^{10}\cdot 5=1\cdot 5=5.$$

Portanto, $\lim_{x\to 0}\left[(x-1)^{10}\cdot(x+5)\right]=5.$

Exemplos

Exemplo 3. Determinar $\lim_{x\to 1}\left[\log_{10}(x^2-2x+101)\right]$.

Resolução: Aplicando o Teorema 3.5 letra d e em seguida o Teorema 3.3 letra a você tem:

$$\lim_{x\to 1}\left[\log_{10}(x^2-2x+101)\right]$$

$$=\log_{10}\left[\lim_{x\to 1}(x)^2-2x+101\right]=\log_{10}\left[1^2-2\cdot 1+101\right]$$

$$=\log_{10}100=\log_{10}10^2=2\cdot\log_{10}10=2\cdot 1=2.$$

Portanto, $\lim_{x\to 1}\left[\log_{10}(x^2-2x+101)\right]=2$.

Problemas

Problema 1. Determinar $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{x \cdot \cos x}{x+1}$.

Resolução: Aplicando diretamente o Teorema 3.3 letra d e o Teorema 3.5 letra b, vem

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{x \cdot \cos x}{x+1} = \frac{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (x \cdot \cos x)}{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (x+1)} = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} + 1}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2} \cdot 0}{\frac{\pi}{2} + 1} = \frac{0}{\frac{\pi}{2} + 1} 0.$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{x \cdot \cos x}{x+1} = 0$.

Problemas

Problema 2. Calcular $\lim_{x\to\pi}\frac{x^2\cdot\cos x}{x+2}$.

Resolução: Aplicando o Teorema 3.3 letra d, e a seguir o Teorema 3.3 letra c e o Teorema 3.3 letra a, você tem

$$\lim_{x\to\pi}\frac{x^2\cdot\cos x}{x+2}=\frac{\lim_{x\to\pi}(x^2\cdot\cos x)}{\lim_{x\to\pi}(x+2)}=\frac{\lim_{x\to\pi}x\cdot\lim_{x\to\pi}\cos x}{\lim_{x\to\pi}x+\lim_{x\to\pi}2}$$

$$=\frac{\pi^2\cdot\cos\pi}{\pi+2}=\frac{\pi^2\cdot(-1)}{\pi+2}=-\frac{\pi^2}{\pi+2}.$$

Portanto, $\lim_{x\to\pi}\frac{x^2\cdot\cos x}{x+2}=-\frac{\pi^2}{\pi+2}$.

Tarefa 1

Resolver os seguintes exercícios, digitalizar e enviar no moodle grupos.

1. Calcular os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+5x-1}{2x-12}$

b) $\lim_{x\to \pi} (x^2 + \cos x)$

c) $\lim_{x\to -2} (x^3 - 2x)^4$