# Soluções de Exercícios Selecionados - Lista 1

Ivan P. Costa e Silva

Janeiro, 2021

**Exercício 3)** Seja $X$ um conjunto fixado. Uma relação $P \subset X \times X$ é *relação de ordem (parcial)* se possui as seguintes propriedades.

O1) (Reflexividade) $\forall x \in X, (x,x) \in P$.

O2) (Antissimetria) $\forall x, y \in X, (x,y) \in P$ e $(y,x) \in P \Rightarrow x = y$.

O3) (Transitividade) $\forall x, y, z \in X$, se $(x,y) \in P$ e $(y,z) \in P$, então $(x,z) \in P$.

Uma relação de ordem $P$ em $X$ é *total* se $\forall x, y \in X, (x,y) \in P,$ ou $(y,x) \in P$. Se $P$ é uma relação de ordem, utiliza-se geralmente a seguinte notação genérica para $x, y \in X$:

$$x \leq y \overset{def}{\iff} (x,y) \in P.$$

Uma relação $R \subset X \times X$ é *relação de ordem (parcial) estrita* se possui as seguintes propriedades.

T1) $\forall x, y \in X, (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \notin R$.

T2) $\forall x, y, z \in X$, se $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R$, então $(x,z) \in R$.

Se $R$ é uma relação de ordem estrita, utiliza-se geralmente a seguinte notação genérica para $x, y \in X$:

$$x < y \overset{def}{\iff} (x,y) \in R.$$

Denote por $\mathcal{PO}(X)$ o conjunto das relações de ordem (parciais) em $X$:

$$\mathcal{PO}(X) = \{P \in \mathbb{P}(X \times X) \,:\, P \text{ é relação de ordem}\}.$$

Analogamente, denote por $\mathcal{SO}(X)$ o conjunto das relações de ordem (parciais) estritas em $X$:

$$\mathcal{SO}(X) = \{R \in \mathbb{P}(X \times X) \,:\, R \text{ é relação de ordem estrita }\}.$$

Defina agora a função

$$\Phi : R \in \mathcal{SO}(X) \mapsto \tilde{R} := R \cup \{(x,x) \,|\, x \in X\} \in \mathcal{PO}(X).$$

Vamos mostrar inicialmente que $\Phi$ está *bem definida*, isto é, que se $R$ é uma relação de ordem estrita, então $\Phi(R) = \tilde{R}$ é uma relação de ordem.

A reflexividade e transitividade de $\tilde{R}$ seguem-se imediatamente da definição. Para checar antissimetria, suponha que $(x,y),(y,x) \in \tilde{R}$. Se $x \neq y$, então teríamos $(y,x),(x,y) \in R$, contradizendo (T1). Portanto $x = y$, o que estabelece (O2).

Vamos provar agora que $\Phi$ é injetora. Doravante escreva

$$\Delta := \{(x,x) \,|\, x \in F\}.$$

Sejam $R, S$ relações de ordem estrita em $X$ com $\tilde{R} = \tilde{S}$. Note que nesse caso, $R \cup \Delta = S \cup \Delta$. Seja $(x,y) \in R$. Como $R$ é ordem estrita, (T1) obriga a que $x \neq y$. Mas então, necessariamente $(x,y) \in S$, já que $(x,y) \in S \cup \Delta$, mas $(x,y) \notin \Delta$. Concluímos que $R \subset S$. Analogamente, temos que $S \subset R$. Portanto, $S = R$, que estabelece a injetividade de $\Phi$.

Provemos agora que $\Phi$ é sobrejetora, e portanto uma bijeção. Seja $P$ uma relação de ordem, e defina

$$S_P := P \setminus \Delta.$$

Afirmamos que $S_P$ é uma ordem estrita. Seja $(x,y) \in S_P$. Em particular, $(x,y) \in P$, mas $x \neq y$; portanto, pela antissimetria de $P$ não podemos ter $(y,x) \in P$. Ou seja, $(y,x) \notin S_P$. Concluímos que vale (T1). Transitividade é clara, e portanto $S_P \in \mathcal{SO}(X)$, e por construção $\Phi(S_P) = P$, o que conclui a prova.

Para concluir o exercício, precisamos mostrar que $R \in \mathcal{SO}(X)$ satisfaz tricotomia se e somente se $\tilde{R} \in \mathcal{PO}(X)$ é ordem total.

($\Rightarrow$)

Suponhamos que $R$ satisfaz tricotomia, e sejam dados $x, y \in X$ quaisquer. Se $x = y$, já temos $(x,x) \in \Delta \subset \tilde{R}$. Se $x \neq y$, por tricotomia, ou $(x,y) \in R \subset \tilde{R}$, ou $(y,x) \in (y,x) \in R \subset \tilde{R}$ (exclusivamente). Isso mostra que $\tilde{R}$ é ordem total.

($\Leftarrow$)

Suponhamos agora que $\tilde{R}$ é ordem total, e sejam novamente dados $x, y \in X$. Se $x = y$, certamente $(x,x) \notin R$ por causa de (T1). Se $x \neq y$, ou bem $(x,y) \in \tilde{R} \setminus \Delta = R$, e nesse caso $(y,x) \notin R$ por (T1), ou então $(y,x) \in \tilde{R} \setminus \Delta = R$, e de novo $(x,y) \notin R$ por (T1). Concluímos que uma e só uma das alternativas $x = y$, $(x,y) \in R$ ou $(y,x) \in R$ ocorre, o que é precisamente a tricotomia desejada.