Introdução à Análise - Verão 2021

Prof.: Ivan Pontual Costa e Silva— 2^a Lista de Exercícios

ALUNO(A):____

1) Sejam (X, τ) um espaço topológico, $K \subset X$ compacto e $Z \subset K$ fechado.

a) Prove que Z é compacto. Ou seja, todo subconjunto fechado de um conjunto compacto e também compacto. (*Sugestão:* comece verificando que dada uma cobertura aberta $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L} \subset \tau$ de Z, $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L} \cup (X \setminus Z)$ é cobertura aberta de K.)

b) Use o item (a) para provar que se (X, τ) é Hausdorff, uma interseção arbitrária de compactos é compacta.

c) Prove que a união finita de compactos é compacto. Dê um contra-exemplo para união infinita.

2) Seja (M, d) um espaço métrico. Prove que para um conjunto $F \subset M$, as seguintes afirmações são equivalentes.

a) F é fechado.

b) Se uma sequência (x_n) de elementos de F converge, então (x_n) converge para um elemento de F.

Em seguida prove que em um espaço topológico (X, τ) qualquer, $(a) \Longrightarrow (b)$, e dê um contra-exemplo onde a recíproca $(b) \Longrightarrow (b)$ *fallha.* Um subconjunto de um espaço topógico que satisfaz a condição (b) é dito ser *sequencialmente fechado.* Conclua que todo conjunto fechado é sequencialmente fechado, mas a recíproca é falsa em geral. Uma topologia é dita *sequencial* se vale esta recíproca. Em particular, a primeira parte do exercício mostra que toda topologia metrizável é sequencial.

3) Seja E um espaço vetorial. Um subconjunto $X \subset E$ é *convexo* se

$$x, y \in X, t \in [0, 1] \Longrightarrow tx + (1 - t)y \in X.$$

Se $\| \, . \, \|$ é uma norma em E, prove que qualquer bola aberta ou fechada correspondente é convexa. Prove também que

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 \leq y\}$$

é convexo.

4) Sejam (X, τ) e (Y, η) espaços topológicos, e defina a seguinte coleção de subconjuntos de $X \times Y$:

$$\mathcal{P} := \{W \subset X \times Y \, : \, \forall (x, y) \in W, \text{ existem } U \in \tau \text{ e } V \in \eta \text{ tais que } (x, y) \in U \times V \subset W\}.$$

a) Prove que $\mathcal{P}$ é uma topologia em $X \times Y$, chamada a *topologia-produto* (de τ e η).

b) Prove que uma sequência $(x_n, y_n) \subset X \times Y$ converge para $(x_0, y_0) \in X \times Y$ na topologia-produto se, e somente se, $x_n \to x_0$ em τ e $y_n \to y_0$ em η.

5) Sejam (M, d) um espaço métrico, $X \subset M$ não-vazio, e $x_0 \in M$. A *distância de x_0 a X* é definida por

$$d(x_0, X) := \inf\{d(x_0, x) \,:\, x \in X\}.$$

Prove que $d(x_0, X) = 0$ se e somente se $x_0 \in \overline{X}$.

6) Sejam (X, τ) um espaço topológico, e $Z \subset X$ um subconjunto. Um elemento $x \in X$ é *ponto de acumulação* de Z se $\forall U \in \tau$ com $x \in U$, $(U \setminus \{x\}) \cap Z \neq \emptyset$. Denote por Z' (lê-se "derivado de Z") o conjunto dos ponto de acumulação de Z.

a) Prove que $\overline{Z} = Z' \cup Z$. Conclua que um subconjunto de um espaço topológico é fechado se e somente se contém todos os seus pontos de acumulação.

b) Um ponto $z \in Z$ é dito ser *isolado* se não for de acumulação. Prove que $z \in Z$ é isolado se e somente se existe um aberto $U \ni z$ tal que $U \cap Z = \{z\}$. Inteprete geometricamente em $\mathbb{R}$ com a topologia usual.

c) Seja $X = \mathbb{R}$, com a topologia usual, e $A = \{1/n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$. Prove que todo elemento de A é isolado, e que o único ponto de acumulação é $x = 0$.

d) Seja $X = \mathbb{R}$, com a topologia usual. Prove que $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$, e portanto $\mathbb{Q}$ não contém pontos isolados. Prove ainda que nenhum intervalo contém pontos isolados.

e) Prove que todo ponto de Z é isolado se e somente se a topologia induzida em Z é a topologia discreta.

7) Seja (M, d) um espaço métrico. Seja $A \subset M$.

a) Prove que $a \in A$ é um ponto isolado se, e somente se, existe $\epsilon > 0$ tal que $B^d_\epsilon(a) \cap A = \{a\}$.

b) Prove que $a \in M$ é ponto de acumulação de A se e somente se para todo $\epsilon > 0$, $(B^d_\epsilon(a) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$.

c) Sejam $a \in A'$, (N, d_N) é um espaço métrico qualquer, e $f : A \to N$ uma função. Dizemos que $L \in N$ é o *limite de $f(x)$ quando x tende a a*, e denotamos por $\lim_{x \to a} f(x) = L$, se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A \text{ e } 0 < d(x, a) < \delta \Longrightarrow d_N(f(x), L) < \epsilon.$$

Explique por que, neste definição, precisamos que a seja um ponto de acumulação, e verifique que se $M = N = \mathbb{R}$ e $d = d'$ é a métrica usual, essa definição recupera a noção de limite usual do Cálculo 1.

8) Sejam (X, τ) um espaço topológico, e $Z \subset X$ um subconjunto. Prove que se uma sequência (x_n) de elementos de Z converge, então seu limite está em $\overline{Z}$.

9) Sejam (M, d) um espaço métrico e $A \subset M$. Prove que $x \in \overline{A}$ se e somente se existe uma sequência (x_n) de elementos de A convergindo para x.