Introdução à Análise - Verão 2021

Prof.: Ivan Pontual Costa e Silva— 1^a Lista de Exercícios

ALUNO(A):____

1) (Este exercício destina-se a ilustrar o fato heurístico que um corpo ordenado não-completo, ainda que Arquimediano, pode ter "buracos".) Considere $\mathbb{Q}$ como um corpo ordenado, com a ordem usual. Sejam

$$A := \{x \in \mathbb{Q}_+ \,|\, 2 < x^2\},$$

$$B := \{x \in \mathbb{Q}_+ \,|\, 2 > x^2\}.$$

(Claro, aqui $\mathbb{Q}_+$ denota o conjunto dos racionais maiores ou iguais a 0.) Prove as seguintes afirmações.

a) A e B não são vazios, A não tem menor elemento e B não tem maior elemento em $\mathbb{Q}$.

b) $B \cup \mathbb{Q}_-$ (racionais não-positivos) coincide com o conjunto das cotas inferiores de A.

c) A não possui ínfimo, e B não possui supremo em $\mathbb{Q}$.

2) Prove as Proposições 1.14, 1.15, 1.16 e 1.18 do livro "Principles of Mathematical Analysis" do Rudin.

3) Seja X um conjunto qualquer. Uma relação $R \subseteq X \times X$ é dita ser uma *ordem estrita* em X se $\forall x, y, z \in X$

i) $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$,

ii) $(x, y), (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ (isto é, R é transitiva).

(Note, em particular, que (i) implica que $(x, x) \notin R$.) Se R é uma ordem estrita em X, prove que $\tilde{R} := R \cup \{(x, x) \in X \times X \,|\, x \in X\}$ é uma relação de ordem em X. Reciprocamente, prove que se $\leq$ é uma relação de ordem em X, então $R := \{(x, y) \,|\, x \leq y \text{ e } x \neq y\}$ é uma ordem estrita em X, e que nesse caso, $\tilde{R}$ coincide com $\leq$. Conclua que a correspondência $R \mapsto \tilde{R}$ define uma bijeção entre a coleção de todas as possíveis relações de ordem e o conjunto de todas as ordens estritas em X. Finalmente, dizemos que uma ordem estrita R em X satisfaz a condição de *tricotomia* se $\forall x, y \in X$, uma e só uma das seguintes três possibilidades ocorre: $x = y$, $(x, y) \in R$ ou $(y, x) \in R$. Prove que R satisfaz a condição de tricotomia se e somente se $\tilde{R}$ é uma ordem total.

4) Seja K um corpo, e seja $\leq$ uma relação de ordem total em K. Denotemos por $<$ a ordem estrita associada (cf. Exercício 3). Prove que as seguintes afirmações são equivalentes.

i) $\forall a, b, c \in K$, $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$.

ii) $\forall a, b, c \in K$, $a < b \Rightarrow a + c < b + c$.

iii) $\forall a, b, c \in K$, $a + c < b + c \Rightarrow a < b$.

iv) $\forall a, b, c \in K$, $a + c \leq b + c \Rightarrow a \leq b$.

Prove também que as seguintes afirmações são equivalentes.

i') $\forall a, b \in K$, $0 \leq a, b \Rightarrow 0 \leq a \cdot b$.

ii') $\forall a, b \in K$, $0 < a, b \Rightarrow 0 < a \cdot b$.

Conclua que podemos definir equivalentemente corpo ordenado em termos de uma relação de ordem estrita ou não-estrita.

5) Para a, b elementos de um corpo ordenado K, prove que $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$. Verifique que essa propriedade é *falsa* em $\mathbb{Z}_2$, e portanto não precisa valer em um corpo não-ordenado.

6) Seja K um corpo ordenado e $X \subset K$. Prove que $a \in K$ é supremo de X se, e somente se, a é cota superior de X em K e para todo $b < a$, existir $x \in X$ com $b < x \leq a$. Enuncie e prove o análogo para ínfimo. (*Sugestão:* tente primeiro entender intuitivamente o que esse resultado significa, e só depois tente prová-lo.). Use isto e a propriedade Arquimediana de $\mathbb{Q}$ para provar que o ínfimo de $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ em $K = \mathbb{Q}$ é de fato o que você imagina.

7) Seja F um corpo ordenado. Para cada $x \in F$, defina seu valor absoluto (ou módulo) $|x|$ pondo $|x| = x$ se $x \geq 0$ e $|x| = -x$, se $x < 0$. Prove o que se pede.

a) Para quaisquer $a, x \in F$, $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$.

b) (Desigualdade triangular) Para quaisquer $x, y \in F$, temos $|x+y| \leq |x|+|y|$.

8) Seja K um corpo. Considere um subconjunto $P \subseteq K$ satisfazendo as seguintes propriedades:

i) $\forall x, y \in K$, se $x \in P$ e $y \in P$, então $x + y \in P$.

ii) $\forall x, y \in K$, se $x \in P$ e $y \in P$, então $x.y \in P$.

iii) (Tricotomia) Para cada $x \in K$, uma e só uma das seguintes alternativas ocorre: $x = 0$, $x \in P$ ou $(-x) \in P$

Chame um elemento $x \in P$ de *positivo* se $x \in P$. Prove que a relação em K dada por

$$O_P := \{(x, y) \in K \times K : y - x \in P\}$$

é uma relação de ordem estrita em K, e que, com respeito a essa ordem, K torna-se um corpo ordenado. Conclua que a relação de ordem em um corpo ordenado é caracterizada por seus elementos positivos.