NOÇÕES DE LIMITE E CONTINUIDADE

Limites Laterais & Indeterminações

Limites Laterais

- Na aula anterior vimos o comportamento de uma função f (x) quando x se aproxima de um número real a e quando x assume valores (positivos ou negativos) de valor absoluto muito grande.

- O nosso objetivo agora é estudar os casos quando x tende para a pela direita, $x \to a$ e $x > a$ ou quando x tende para a pela esquerda, $x \to a$ e $x < a$ e com isto identificar a existência de limite de uma função através dos limites laterais e esboçar o gráfico de uma função usando limites laterais. Para isto vejamos as seguintes definições.

Limites Laterais

Definição 3.2. Limite à esquerda.
Se $f(x)$ tende para L_1 quando x tende para a através de valores menores que a diz-se que L_1 é o limite de $f(x)$ quando x tende para a pela esquerda e indica-se por $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$.

Definição 3.3. Limite à direita.
Se $f(x)$ tende para L_2 quando x tende para a através de valores maiores que a diz-se que L_2 é o limite de $f(x)$ quando x tende para a pela direita e indica-se por $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$.

Exemplos

Exemplo 1. Seja a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se} \quad x < 1 \\ 4, & \text{se} \quad x = 1 \\ 4 - x, & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}.$$

Determinar: a) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$; b) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$. Esboce o gráfico de $f(x)$.

Exemplos

Resolução: Pela definição de limite à esquerda, você responde a letra a. Observe que a função $f(x)$ está definida por $f(x) = x^2 + 1 \quad se \quad x < 1$.

Logo, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 + 1) = 1^2 + 1 = 2$.

Assim, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$.

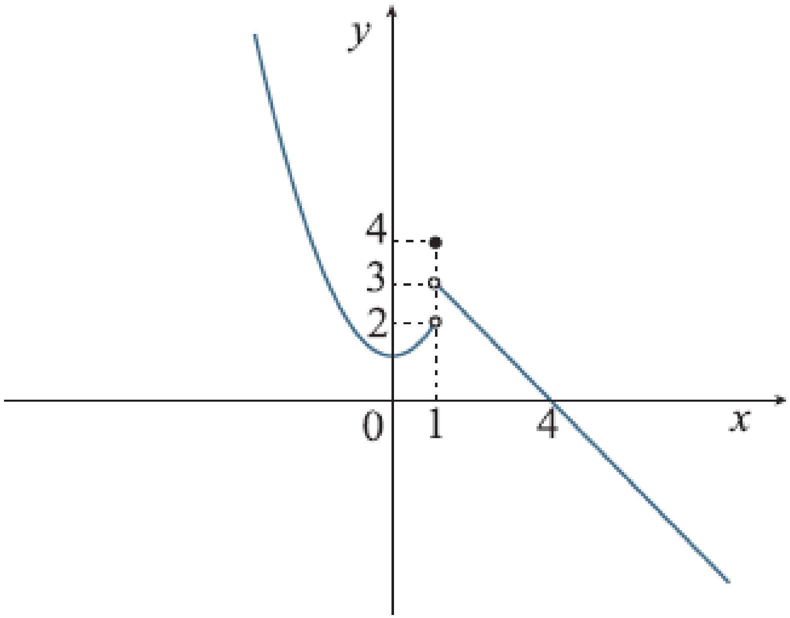
Agora, pela definição de limite à direita você responde a letra b. Observe que a função $f(x)$ está definida por $f(x) = 4 - x$ se $x > 1$.

Logo, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (4 - x) = 4 - 1 = 3$.

Assim, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$.

Exemplos

Note que $f(1)=4$. Com estas informações, de que $f(1)=4$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)=2$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x)=3$, você consegue perceber como $f(x)$ se comporta quando x está próximo de 1. Para esboçar o gráfico de $f(x)$, dê valores para x, $x<1$ e calcule os valores de $f(x)$ correspondentes através da expressão x^2+1, dê valores para $x>1$ e calcule os valores de $f(x)$ correspondentes através da expressão $4-x$ e veja o gráfico de $f(x)$ ao lado



Exemplos

Exemplo 2. Considere a função

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & \text{se } x\le -2 \\ 2x+7, & \text{se } x>-2 \end{cases}.$$

Determinar: a) $\lim_{x\to -2^-} f(x)$; b) $\lim_{x\to -2^+} f(x)$. Esboçar o gráfico de $f(x)$.

Exemplos

Resolução: Pela definição de limite à esquerda, vamos resolver letra a. Observe como está definida a função acima para valores de x à esquerda de –2, ou seja, para $x \leq -2$.

Assim, $f(x) = x^2 - 1$ se $x \leq -2$ e

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (x^2 - 1) = (-2)^2 - 1 = 3.$$

Logo, $\lim_{x \to -2^-} f(x) = 3$.

Pela definição de limite à direita, vamos resolver a letra b. Para valores de x à direita de –2, a função $f(x)$ está definida por $f(x) = 2x + 7$ se $x > -2$ e

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (2x + 7) = 2 \cdot (-2) + 7 = 3.$$

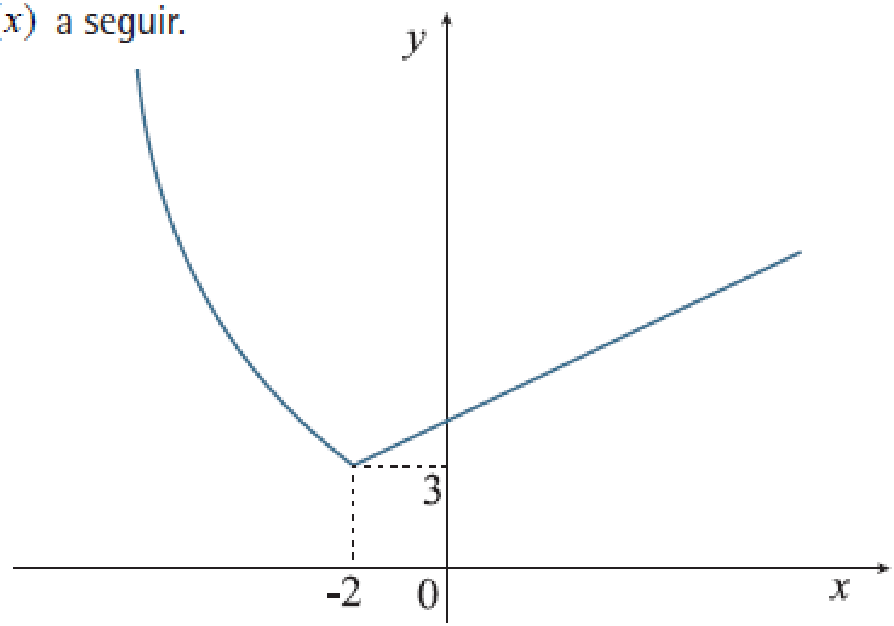
Logo, $\lim_{x \to -2^+} f(x) = 3$.

Portanto, $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = 3$.

Exemplos

Note que $f(-2) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$.

Como $f(-2) = 3$ e $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = 3$, para esboçar o gráfico de $f(x)$, dê valores para x, $x \leq -2$ e calcule os valores de $f(x)$ correspondentes através da expressão $x^2 - 1$, dê valores para $x > -2$ e calcule os valores de $f(x)$ correspondentes através da expressão $2x + 7$ e veja o gráfico de $f(x)$ a seguir.



Exemplos

Exemplo 3. Considere a função $f(x) = 2 + \sqrt{x-4}$. Determinar se possível $\lim_{x \to 4^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 4^+} f(x)$. Esboçar o gráfico de $f(x)$.

Resolução: Não se pode questionar $\lim_{x \to 4^-} f(x)$ pois a função $f(x)$ só está definida para $x - 4 \geq 0$ ou $x \geq 4$. Se $x < 4$ então $x - 4$ será um número negativo e $x \notin \mathrm{Dom}\, f$.

Para calcular o $\lim_{x \to 4^+} f(x)$, você tem que a função $f(x)$ está definida somente para valores de $x - 4 \geq 0$ ou $x \geq 4$ e podemos escrever

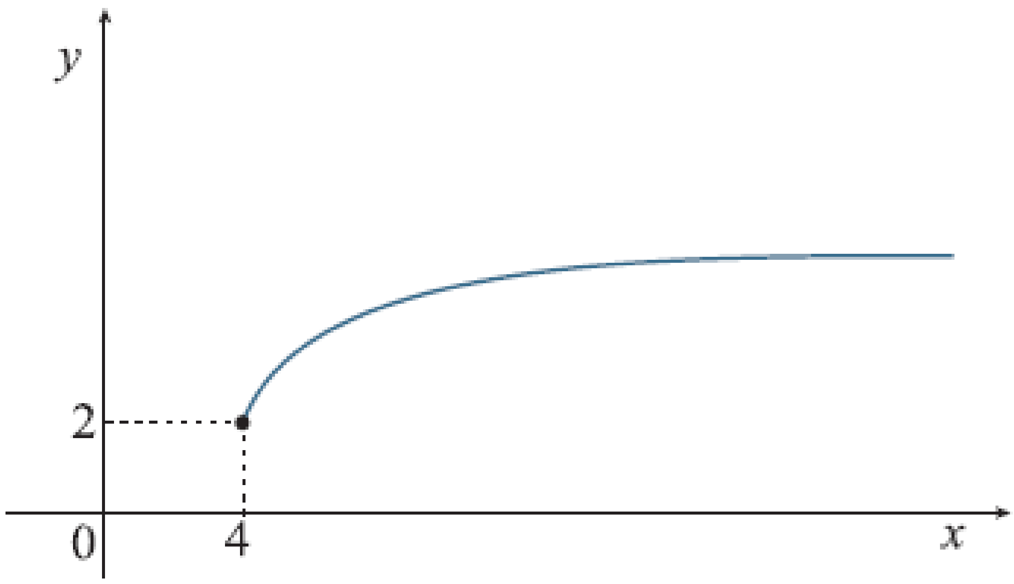
$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} (2 + \sqrt{x-4}) = \lim_{x \to 4^+} 2 + \lim_{x \to 4^+} \sqrt{x-4}$$

$$= 2 + \sqrt{\lim_{x \to 4^+} (x-4)} = 2 + \sqrt{4-4} = 2 + 0 = 2.$$

Portanto, $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 2$.

Exemplos

Para esboçar o gráfico de $f(x)$, dê valores para x, $x \geq 4$ e calcule os valores de $f(x)$ correspondentes e você terá o gráfico de $f(x)$ a seguir.



Teorema de Existência do Limite

Sejam I um intervalo aberto, a um ponto deste intervalo e

$f : \mathrm{I} - \{a\} \to \mathbb{R}$. Então $\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$.

Vejamos agora alguns exemplos de aplicação do teorema de existência do limite.

Exemplos

Exemplo 1. Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{se } x<2 \\ 1, & \text{se } x=2 \\ x+3, & \text{se } x>2 \end{cases}$.

Determinar o $\lim_{x\to 2} f(x)$, se existir, e esboçar o gráfico de $f(x)$.

Resolução: Para determinar o $\lim_{x\to 2} f(x)$, vamos calcular os limites laterais de $f(x)$, ou seja, calcular $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x)$. Para calcular $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, observe na função dada como $f(x)$ está definida por $f(x)=x^2+1$ para valores de x menores que 2.

Assim, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x^2+1) = 2^2+1=5$.

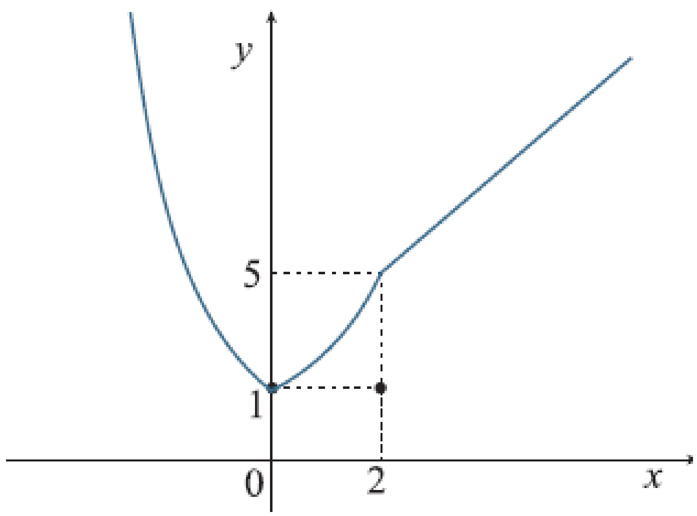
Para calcular $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, observe na função dada como $f(x)$ está definida por $f(x)=x+3$ para valores de x maiores que 2.

Assim, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x+3) = 2+3=5$.

Exemplos

Como $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5$ e $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 5$,. pelo teorema acima temos $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$.

Para esboçar o gráfico da função $f(x)$ você utiliza o mesmo procedimento do exemplo anterior e conseguirá facilmente o gráfico da função $f(x)$ conforme figura



Exemplos

Exemplo 2. Seja a função $f(x) = \begin{cases} x+2, & se\ x \le 4 \\ 5-x, & se\ x > 4 \end{cases}$.

Determinar $\lim_{x \to 4} f(x)$, se existir, e esboçar o gráfico de $f(x)$.

Resolução: Para determinar o $\lim_{x \to 4} f(x)$, devemos calcular os limites laterais de $f(x)$, ou seja, calcular $\lim_{x \to 4^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 4^+} f(x)$.

Para calcular $\lim_{x \to 4^-} f(x)$ observe na função dada como $f(x)$ está definida por $f(x) = x+2$ para valores de x menores que 4.

Assim, $\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} (x+2) = 4+2 = 6$.

Para calcular o $\lim_{x \to 4^+} f(x)$ verifique agora como $f(x)$ está definida por $f(x) = 5-x$ para valores de $x > 4$.

Assim, $\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} (5-x) = 5-4 = 1$.

Como $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 6$ e $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 1$,, isto é, os limites laterais são diferentes, conclui-se pelo teorema de existência do limite que não existe $\lim_{x \to 4} f(x)$.

Exemplos

Exemplo 3. Considere a função $f(x) = \begin{cases} 3x-5, & \text{se } x < 2 \\ 4x+k, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$.

Determinar o valor da constante real k para que exista $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Resolução: Inicialmente vamos calcular os limites laterais de $f(x)$. Para calcular o limite à esquerda de 2 (para $x < 2$), temos

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (3x-5) = 3 \cdot 2 - 5 = 6 - 5 = 1.$$

Assim, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$.

Para calcular o limite à direita de 2 (para $x > 2$), temos

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (4x+k) = 4 \cdot 2 + k = 8 + k.$$

Assim, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 8 + k$.

Pelo teorema 3.6, você sabe que existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ se e somente se os limites laterais existem e são iguais, ou seja, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$.

Como $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$ *e* $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 8 + k$, vem $1 = 8 + k$, o que fornece $k = 1 - 8 = -7$. Logo $k = -7$.

Portanto, o valor da constante real k para que exista $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ é $k = -7$.

Tarefa 2

Resolver os seguintes exercícios, digitalizar e enviar no moodle grupos.

2. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2, & se\ x < 2 \\ 1, & se\ x = 2 \\ 4 - x, & se\ x > 2 \end{cases}$. Calcular: $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x)$.

Indeterminações

- Se desejarmos calcular $\lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{x}$ ou $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-4}{x-2}$ sabemos que os teoremas até aqui estudados não se aplicam, pois os denominadores possuem o limite 0. Aplicando (erroneamente) os teoremas, obteríamos nos dois casos a expressão $\frac{0}{0}$.
- Dizemos que $\frac{0}{0}$ é uma indeterminação ou símbolo de uma.
- Calculando limites de funções, podemos chegar a outras expressões que são símbolos de indeterminações e, ao todo, são sete:

$$\frac{0}{0}\ ,\ \frac{\infty}{\infty}\ ,\ 0\ .\ \infty\ ,\ \infty - \infty\ ,\ 0^0\ ,\ 1^\infty \text{ e } \infty^0$$

Indeterminações

Sempre que no cálculo de um limite você chegar a um destes símbolos, deve buscar alguma alternativa para obter o valor do limite usando artifícios algébricos. A este trabalho dá-se o nome de levantamento de uma indeterminação.

Exemplos

Exemplo 1. Calcular $\lim_{x \to 5} \frac{x-5}{x^2-25}$.

Resolução: Se no cálculo deste limite você tentar utilizar o item d do Teorema 3.3 (que não pode ser aplicado aqui, pois o denominador tem limite 0), você chegará à indeterminação $\frac{0}{0}$. Neste caso o artifício algébrico usado para levantar a indeterminação obtida é a fatoração.

Para fatorar o denominador x^2-25 vamos utilizar o produto notável $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$.

Assim, você tem $x^2-25=x^2-5=(x-5)\cdot(x+5)$.

Desta forma o limite dado, será igual a

$$\lim_{x \to 5} \frac{x-5}{x^2-25} = \lim_{x \to 5} \frac{x-5}{(x-5)\cdot(x+5)} = \lim_{x \to 5} \frac{1}{x+5} = \frac{1}{5+5} = \frac{1}{10}$$

Portanto, $\lim_{x \to 5} \frac{x-5}{x^2-25} = \frac{1}{10}$.

Exemplos

Exemplo 2. Calcular $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 7x + 10}$.

Resolução: Se no cálculo deste limite você tentar utilizar o item d do Teorema 3.2.3 (que não pode ser aplicado aqui, pois o denominador tem limite 0), você chegará à indeterminação $\dfrac{0}{0}$.

Para levantar essa indeterminação, usaremos os passos a seguir:

Exemplos

1. Fatoramos o numerador: $\frac{x^3-5x^2+6x}{x^2-7x+10} = \frac{x.(x^2-5x+6)}{x^2-7x+10}$

2. extraímos as raízes de ambas as equações e, por báskhara, encontramos:
   - Para o numerador: $x_1 = 3$ e $x_2 = 2$;
   - Para o denominador: $x_1 = 5$ e $x_2 = 2$.

3. remodelamos a equação e simplificamos:

$$\frac{x.(x-3).(x-2)}{(x-5).(x-2)} = \frac{x.(x-3)}{(x-5)}$$

Exemplos

4. agora podemos aplicar os teoremas conhecidos:
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-5x^2+6x}{x^2-7x+10} = \lim_{x\to 2} \frac{x.(x-3)}{(x-5)} = \frac{\lim\limits_{x\to 2} x\cdot\lim\limits_{x\to 2}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-5)}$$

5. que resulta: $\frac{2(-1)}{-3} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-5x^2+6x}{x^2-7x+10} = \frac{2}{3}$

Exemplos

Exemplo 3. Calcular $\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$.

Resolução: Para calcular este limite se você tentar utilizar o item d do Teorema 3.3 (que não pode ser aplicado, pois o denominador tem limite 0), você chegará à indeterminação $\frac{0}{0}$.

Vamos levantar esta indeterminação e para isto você usa o artifício algébrico do produto notável $a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$. Você multiplica o numerador da função, $\sqrt{x}-3$, pelo seu conjugado, $\sqrt{x}+3$, para eliminar a raiz quadrada do numerador. Para não alterar a função você multiplica também o denominador por $\sqrt{x}+3$.

Exemplos

Como $(\sqrt{x+3}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})=(\sqrt{x+3})^2-(\sqrt{3})^2$, temos

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}\cdot\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}=\lim_{x\to 9}\frac{(\sqrt{x}-3)\cdot(\sqrt{x}+3)}{(x-9)\cdot(\sqrt{x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{(x-9)}{(x-9)\cdot(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}.$$

Portanto, $\lim_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\dfrac{1}{6}$.

Tarefa 3

Resolver os seguintes exercícios, digitalizar e enviar no moodle grupos.

5. Calcular os limites seguintes:

a) $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9}$

b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-4x^2-3x}{x^2+3x-4}$