Limites Laterais e Indeterminação

(2) $f(x) = \begin{cases} x^2, & se\ x < 2 \\ 1, & se\ x = 2 \\ 4-x, & se\ x > 2 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 = 2^2 = 4$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (4-x) = 4-2 = 2$$

Note que $f(2) = 1$, isto é, $f(2) \neq 4$ e $f(2) \neq 2$.
Portanto, os limites laterais são ambos diferentes do valor da função no ponto 2.

(3) $f(x) = \begin{cases} x^3+1, & se\ x < 1 \\ 3, & se\ x = 1 \\ x+1, & se\ x > 1 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^3+1 = 1^3+1 = 1+1 = 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} (x+1) = 1+1 = 2$$

Pelo teorema 3.6, temos que o $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$.

Contudo, observe que $f(1) = 3 \neq 2 = \lim_{x \to 1} f(x)$.

④ $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{se } x \leq 3 \\ 4 - x, & \text{se } x > 3 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} x^2 - 2x = 3^2 - 3 \cdot 2 = 9 - 6 = 3$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} 4 - x = 4 - 3 = 1$$

Portanto, pelo teorema 3.6, não existe $\lim_{x \to 3} f(x)$.

⑤ a) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9}$

Se aplicarmos o valor 3 em x, teremos a indeterminação, é $\frac{0}{0}$. O artifício para levantá-la é a fatoração.

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}(x+3)} =$$

Lembrar que!
$a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{1}{x+3} =$$

$$= \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

d) $\lim_{x \to -8} \dfrac{\sqrt[3]{x} + 2}{x + 8}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Para levantar essa indeterminação, fazemos mudança de variável:

$$\sqrt[3]{x} = t \Rightarrow t^3 = x$$

e segue que,

quando $x \to -8$, $t \to -2$. Logo

$$\lim_{t \to -2} \frac{t+2}{t^3+8}$$

Lembrando que $a^3 + b^3 = (a+b).(a^2 - ba + b^2)$

$$\lim_{t \to -2} \frac{\cancel{t+2}}{\cancel{(t+2)}.(t^2 - 2t + 4)}$$

$$\lim_{t \to -2} \frac{1}{t^2 - 2t + 4} =$$

$$= \frac{1}{(-2)^2 - 2.(-2) + 4} = \frac{1}{12}$$

5 b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 4x^2 - 3x}{x^2 + 3x - 4}$

Indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Também devemos fatorar os polinômios:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x(x^2 - 4x - 3)}{(x-1)(x+4)}$$

Lembrar que um número a é raiz de um polinômio p(x) se e, somente se, p(x) é divisível por $\underline{x-a}$.

Podemos fatorar novamente o numerador:

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x \cdot \cancel{(x-1)} \cdot (x-3)}{\cancel{(x-1)}(x+4)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x}{x + 4} = \frac{1^2 - 3 \cdot 1}{1 + 4} = \frac{1-3}{5} = -\frac{2}{5}$$

c) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ Também do tipo $\frac{0}{0}$

Lembrando que $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$, eliminaremos a raiz se multiplicarmos o numerador pelo conjugado.

$$= \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x})^2 - 2^2}{(x-4)\cdot(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{\cancel{x - 4}}{\cancel{(x-4)}\cdot(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2}$$

e) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt[6]{x} - 1} = \dfrac{0}{0}$

Para podermos extrair as raízes, fazemos uma mudança de variável igualando x a uma potência de t, cujo expoente seja divisível por 4 e 6 (M.M.C).

$$x = t^{12}, \quad \text{com } t > 0$$

Assim quando $x \to 1$, $t \to 1$. Logo

$$\lim_{t \to 1} \frac{\sqrt[4]{t^{12}} - 1}{\sqrt[6]{t^{12}} - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{t^3 - 1}{t^2 - 1}$$

Lembrando que: $a^3 - b^3 = (a-b).(a^2 + ab + b^2)$ e que $a^2 - b^2 = (a+b).(a-b)$:

$$\lim_{t \to 1} \frac{\cancel{(t-1)}.(t^2+t+1)}{\cancel{(t-1)}.(t+1)} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{t^2 + t + 1}{t+1} = \frac{1^2 + 1 + 1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

Limites no infinito e limites infinitos.

Nilo 107, exemplo 9.

6 a) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 5x - 4}{x^3 + 7x}$

A indeterminação é do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Para levantar essa indeterminação, dividimos o numerador e o denominador pelo x com maior potência. Então,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 5x - 4}{x^3 + 7x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^3} + \frac{5x}{x^3} - \frac{4}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{7x}{x^3}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{4}{x^3}}{1 + \frac{7}{x^2}}$$

$$= \frac{0 + 0 - 0}{1 + 0} = 0$$

Obs: Se $x \to -\infty$, o procedimento seria o mesmo.

6 b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt{x^2-x}}$

Para calcular esse limite, dividimos os dois termos da fração por x. Como $x \to +\infty$, podemos supor $x > 0$ e, assim, $x = \sqrt{x^2}$. Logo,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt{x^2}}}{\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{\dfrac{x^2+3x}{x^2}}}{\sqrt{\dfrac{x^2-x}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{1-0}} = 1 \,//$$

c) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + \sqrt{1-x}}}{x+5}$$

Dividimos os dois termos da fração por x. Entretanto, como $x \to -\infty$, podemos supor $x < 0$, de modo que $x = -\sqrt{x^2}$. Assim:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + \sqrt{1-x}}}{x+5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2 - \sqrt{1-x}}}{x}}{\frac{x+5}{x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2 - \sqrt{1-x}}}{-\sqrt{x^2}}}{1 + \frac{5}{x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{x^2 + \frac{\sqrt{1-x}}{x^2}}}{1 + \frac{5}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{x^2 + \sqrt{\frac{1-x}{x^4}}}}{1 + \frac{5}{x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{x^2 + \sqrt{\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^3}}}}{1 + \frac{5}{x}} = -\frac{\sqrt{1 + \sqrt{0+0}}}{1+0} =$$

$$= -1$$

8

7 a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^5 + 3x^2 + 2x}{x^3 - 7x^2}$

Dividindo tudo pelo x de maior grau temos:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^5 + 3x^2 + 2x}{x^3 - 7x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^5}{x^5} + \frac{3x^2}{x^5} + \frac{2x}{x^5}}{\frac{x^3}{x^5} - \frac{7x^2}{x^5}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1 + \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^4}}{\frac{1}{x^2} - \frac{7}{x^3}}$$

Como o numerador tem limite 1 e o denominador tem limite 0 e é positivo para $x < 0$, temos

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^5 + 3x^2 + 2x}{x^3 - 7x^2} = +\infty$$

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\cos x}{x}$

Como o numerador tem limite 1 e o denominador tem limite 0 e é negativo, temos

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\cos x}{x} = -\infty$$

Limites Fundamentais

8 a) $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

Para calcular esse limite, fazemos a mudança de variável: $x = \dfrac{1}{y}$ e, consequentemente:

$$x \to 0 \implies y \to \infty$$

Logo,

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y} = e$$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{tg\, x}{x}$

Nesse caso, usamos a relação trigonométrica $tg\, x = \frac{sen\, x}{cos\, x}$ para chegar a uma expressão que envolva o primeiro limite fundamental

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg\, x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x \cdot cos\, x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{sen\, x}{x} \cdot \frac{1}{cos\, x} \right)$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{sec\, x - 1}{x^2 \cdot sec\, x}$

Através das relações trigonométricas devemos transformar a expressão dada numa expressão que envolva o primeiro limite fundamental.

Como $\frac{sec - 1}{x^2 \cdot sec x} = \frac{\frac{1}{cos x} - 1}{x^2 \cdot \frac{1}{cos x}}$

$$= \frac{\frac{1 - cos x}{cos x}}{\frac{x^2}{cos x}} = \frac{1 - cos x}{\cancel{cos x}} \cdot \frac{\cancel{cos x}}{x^2}$$

$$= \frac{1 - cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + cos x}{1 + cos x}$$

$$= \frac{1 - cos^2 x}{x^2 \cdot (1 + cos x)} = \frac{sen^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + cos x}$$

$$= \left(\frac{sen x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + cos x},$$ temos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sec x - 1}{x^2 \cdot sec x} = \lim_{x \to 0} \left[\left(\frac{sen x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + cos x}\right]$$

$$= 1^2 \cdot \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$ //

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x$

Fazer a substituição $\frac{k}{x} = \frac{1}{y}$, ou $x = ky$.
Então, $x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$

E tem-se:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = \lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{ky}$$

$$= \lim_{y \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right]^k = e^k$$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3^{x+4} - 81}{x}$

Basta pôr em evidência o fator 3^4 para chegar ao terceiro limite fundamental:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3^{x+4} - 81}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{3^4 . (3^x - 1)}{x}$$

$$= 3^4 \times \lim_{x \to 0} \frac{3^x - 1}{x} = 3^4 \times \ln 3$$

$$= 81 \ln 3 \;//$$

Funções contínuas

(9) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{se } x \neq 1 \\ 2, & \text{se } x = 1 \end{cases}$

Precisamos verificar se $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

É fácil observar que $f(1) = 2$. Agora vamos calcular $\lim_{x \to 1} f(x)$:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x+1).\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x \to 1} x + 1 = 2 \;//$$

Como $\lim_{x \to 1} f(x) = 2 = f(1)$, a função é contínua em $x = 1$.//

(10) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3x+2}{x+1}, & \text{se } x < -1 \\ 1, & \text{se } x = -1 \\ 3x, & \text{se } x > -1 \end{cases}$

Precisamos verificar se $\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$.

Para $x = -1$, é fácil observar que $f(x) = 1$, isto é, $f(-1) = 1$.

Agora, devemos calcular o $\lim_{x \to -1} f(x)$ e, para isto, devemos calcular os limites laterais e verificar se $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) = 1$ para que $f(x)$ seja contínua.

Para $x < -1$, $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x+1}$. Quando $x \to -1$, temos a indeterminação $\dfrac{0}{0}$.

Para levantar essa indeterminação, devemos fatorar e, para isso, encontramos as raízes de $x^2 + 3x + 2 = 0$, através da fórmula de Báskara. Temos $x_1 = -1$ e $x_2 = -2$.

Assim temos:

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+3x+2}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{\cancel{(x+1)}\times(x+2)}{\cancel{x+1}}$$

$$= \lim_{x\to -1^-} (x+2) = -1+2 = 1$$ //

Agora vamos calcular $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$:

Para $x>-1$, $f(x) = 3x$, logo

$$\lim_{x\to -1^+} 3x = 3\times(-1) = -3$$

Como $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -1^+} (f(x))$,

não existe $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

Portanto, a função $f(x)$ dada não é contínua em $x=-1$.