UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CÍRCULOS MATEMÁTICOS
LISTA DE EXERCÍCIOS 08 (2023/1)

PROFS. ELIEZER BATISTA E SÉRGIO TADAO MARTINS

Exercício 1. Os números positivos a, b e c formam uma PA, mostre que os números

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \quad \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

também formam uma PA.

Exercício 2. Os números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ formam uma PA. Mostre que

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

Exercício 3. Os números não nulos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ formam uma PA. Mostre que

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}$$

Exercício 4. **a)** Utilize as diferenças entre os quadrados dos números inteiros consecutivos, isto é, 2^2-1^2, 3^2-2^2, 4^2-3^2, ..., $n^2-(n-1)^2$, para construir uma fórmula geral para a soma dos n primeiros números inteiros positivos, isto é, a soma $1+2+3+4+\cdots+n$.

b) Utilize as diferenças entre os cubos dos números inteiros consecutivos, isto é, 2^3-1^3, 3^3-2^3, 4^3-3^3, ..., $n^3-(n-1)^3$, para construir uma fórmula geral para a soma dos quadrados dos n primeiros números inteiros positivos, isto é, a soma $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2$.

c) Como é que fica a generalização desta ideia para as outras potências? Você notou que você só consegue fazer um passo se tiver feito todos os anteriores?

Exercício 5. Dados os termos $a_{m+n}=A$ e $a_{m-n}=B$ de uma PG ($A\neq 0$), encontre os termos a_n e a_m em termos de A e B.

Exercício 6. Mostre que os números da forma 49, 4489, 444889, ... obtidos inserindo-se 48 no meio do número precedente, são todos quadrados de números inteiros.

Exercício 7. Calcule a soma

$$6+66+666+6666+\cdots+66\ldots66$$

em que o último termo tem 100 algarismos 6.

Exercício 8. Calcule a soma

$$nx+(n-1)x^2+(n-2)x^3+\cdots+2x^{n-1}+x^n.$$

Exercício 9. Seja S_n a soma dos primeiros n termos de uma Progressão Geométrica ($S_n\neq 0$ e razão $q\neq 0$). Mostre que

$$\frac{S_n}{S_{2n}-S_n}=\frac{S_{2n}-S_n}{S_{3n}-S_{2n}}.$$

Note que, para $q=1$, o método é diferente.

Exercício 10. Calcule as seguintes somas:

a)

$$S_1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{2021.2022}$$

b)

$$S_2 = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \cdots + \frac{1}{2020.2021.2022}$$

c)

$$S_3 = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2022}+\sqrt{2021}}$$

d)

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

e)

$$S_5 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots$$