



CÍRCULOS MATEMÁTICOS
LISTA DE EXERCÍCIOS 09 (2023/2)

PROFS. ELIEZER BATISTA E SÉRGIO TADAO MARTINS

Exercício 1. Nos exercícios abaixo, encontre uma fórmula para o termo geral da sequência apresentada:

- a) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$
- b) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$
- c) $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$
- d) $a_{n+1} = 2a_n + 1$, $a_0 = 0$
- e) $a_{n+1} = 2a_n + n$, $a_0 = 1$
- f) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 3n + 7$, $a_0 = 2$, $a_1 = 3$

Exercício 2. Mostre que os números de Fibonacci F_n definidos no exercício anterior satisfazem

$$F_0 + F_1 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

para $n \geq 0$.

Exercício 3. Seja

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

e seja $P(x)$ um polinômio. Mostre que a função geratriz para $g(x) = \sum_{n \geq 0} P(n)a_n x^n$ é obtida ao aplicarmos o operador $P(xD)$ a f , em que o operador xD consiste em derivar e depois multiplicar por x .

Exercício 4. Use o resultado do exercício anterior e

$$\sum_{n=0}^N x^n = \frac{x^{N+1} - 1}{x - 1}$$

para obter uma fórmula para $1^2 + 2^2 + \cdots + N^2$.

Exercício 5. Mostre que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{1 - t^n} = \sum_{n \geq 1} d(n)t^n,$$

em que $d(n)$ é o número de divisores positivos de n .