CÍRCULO MATEMÁTICO DA UFSC

Prof. Raphael da Hora
Encontro do dia 22/06/2022

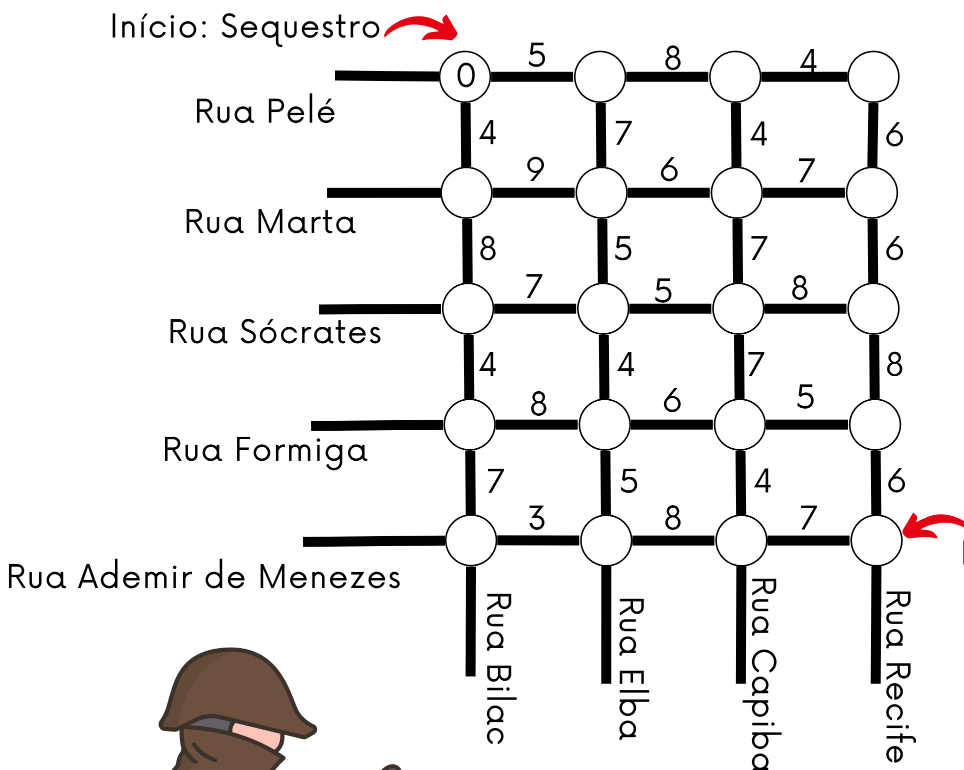
Nome: ______________________________

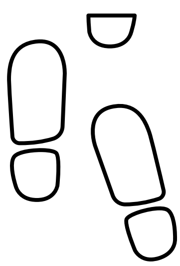
O ALGORITMO DE DIJKSTRA E MAIS GRAFOS

PROBLEMAS DO ENCONTRO

MELHOR ROTA DE FUGA

Você está ajudando a polícia na busca de sequestradores. O grafo abaixo representa um mapa da cidade com o tempo, em minutos, necessário para dirigir de interseção a interseção. Encontre um possível caminho ideal do ponto de sequestro até o ponto de fuga.

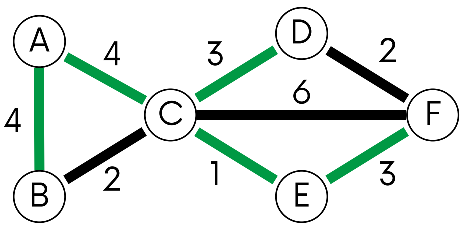




ALGORITMO DE DIJKSTRA

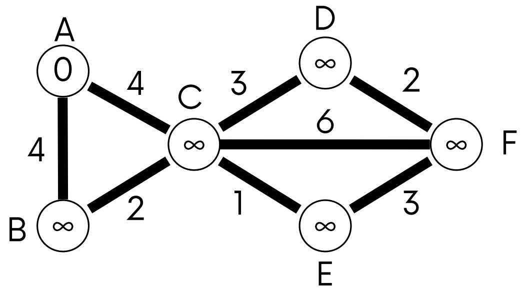
O algoritmo de Prim funciona bem se quisermos encontrar, por exemplo, a maneira mais barata de criar trilhos de trem de forma que ainda possamos visitar cada local. Mas e se eu quiser encontrar a maneira mais rápida de ir do ponto A ao ponto B? É aí que entra o algoritmo de Dijkstra. Ele pode nos ajudar a encontrar o caminho mais barato ou rápido entre dois vértices de um determinado grafo.

Um caminho mais curto é uma árvore que contém os caminhos mais curtos de um vértice "inicial" para qualquer outro vértice do grafo. Veja o exemplo abaixo.



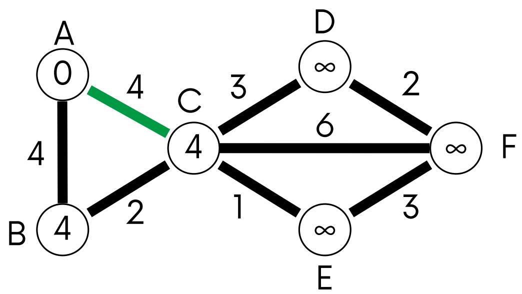
Na árvore verde ao lado, A é nosso vértice inicial. Observe que, se não quisermos repetir vértices ou arestas, há apenas um caminho de A para cada vértice na árvore verde. Esse caminho único é o caminho mais curto de A para esse vértice.

Passo 1



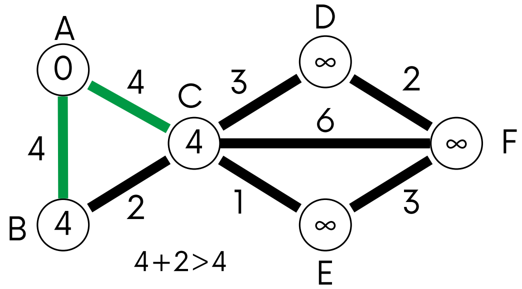
Escolha um vértice inicial e atribua valores de caminho infinito (∞) a todos os outros vértices;

Passo 2



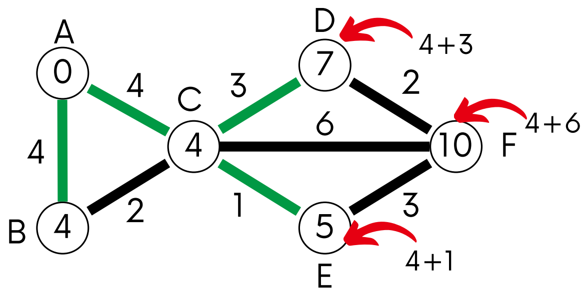
Escolha o vértice vizinho que tem o menor custo. Se houver vários vértices com o menor custo, escolha qualquer um desses vértices;

Passo 3



Se o comprimento do caminho do vértice adjacente for menor que o comprimento do novo caminho, não o atualize;

Passo 4

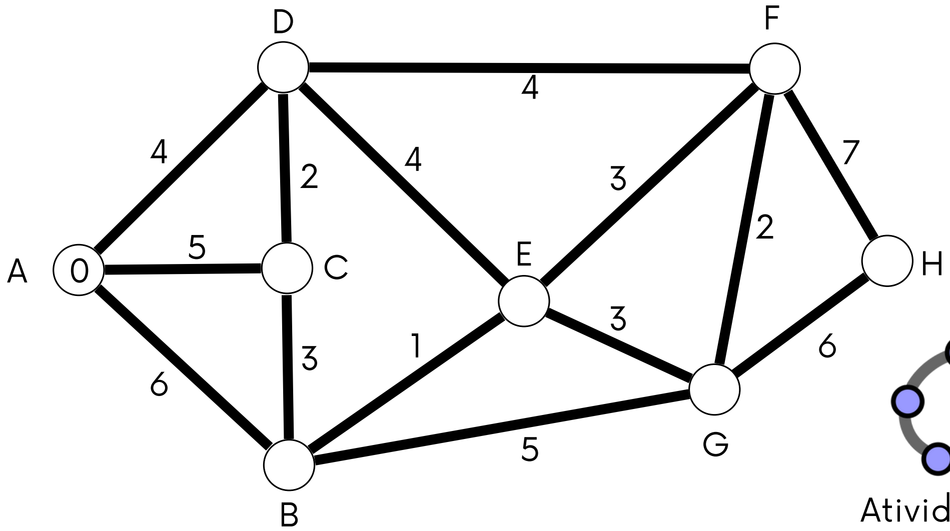


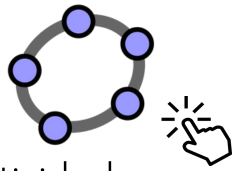
Após cada passo, escolhemos o vértice não visitado com o menor comprimento do caminho. Então escolhemos 5 antes de 7.

Agora, podemos ver que o caminho passando por E é mais curto que ir diretamente de C para F, pois 5 + 3 é menor que 4 + 6.

EXEMPLO DO ALGORITMO DE DIJKSTRA

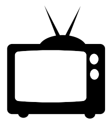
Use o algoritmo de Dijkstra para encontrar o caminho mais curto do vértice A a todos os outros vértices do grafo abaixo.





Atividade no GeoGebra

GRAFOS NA TV

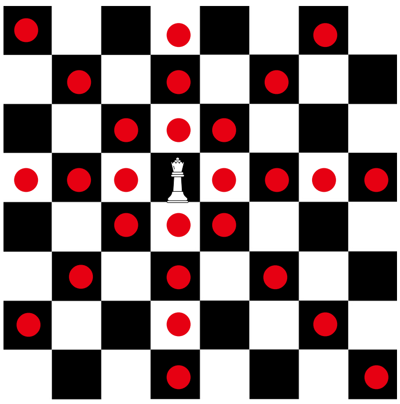


Num episódio da série “Numb3rs”, um caminhão blindado transportando dinheiro e remédios que serão doados à África é sequestrado. Os sequestradores querem sair o mais rápido possível de Los Angeles, Charlie trata de determinar possíveis rotas e os respectivos tempos de fuga. No entanto, em vez de calcular os tempos para cada rota de fuga possível, Charlie usa o algoritmo de Dijkstra para calcular as rotas mais prováveis que os sequestradores podem ter usado para escapar de Los Angeles. Na tabela abaixo, os locais onde um carro pode mudar de uma rua para outra são os vértices A, B, C, D, E, F, G e H. O tempo (em minutos) necessário para viajar entre dois vértices é dado na tabela abaixo.

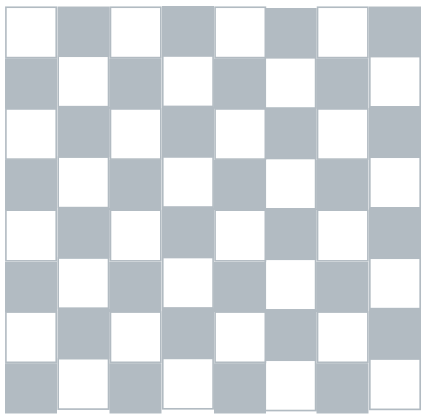
	A	B	C	D	E	F	G	H
A	-	5	-	-	-	14	-	-
B	5	-	7	12	8	-	-	-
C	9	7	-	6	-	5	15	-
D	-	12	6	-	12	-	8	11
E	-	8	-	12	-	-	-	5
F	14	-	5	-	-	-	10	-
G	-	-	15	8	-	10	-	9
H	-	-	-	11	5	-	9	-

O PROBLEMA DAS CINCO RAINHAS

Em 1862, de Jaenisch colocou o problema de encontrar o número mínimo de rainhas em um tabuleiro de xadrez para que cada casa fosse ocupada ou sob ataque de uma rainha (uma casa está sob ataque de uma rainha se a rainha puder pousar naquele espaço em um movimento). Você pode colocar 5 rainhas em um tabuleiro de xadrez 8x8 para que todas as casas livres sejam atacadas por pelo menos uma rainha, e nenhuma rainha possa ser atacada por outra rainha?



Movimentos da Rainha

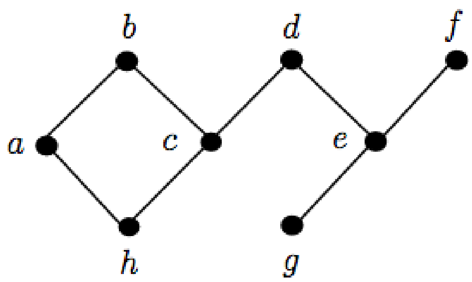


Atividade no GeoGebra

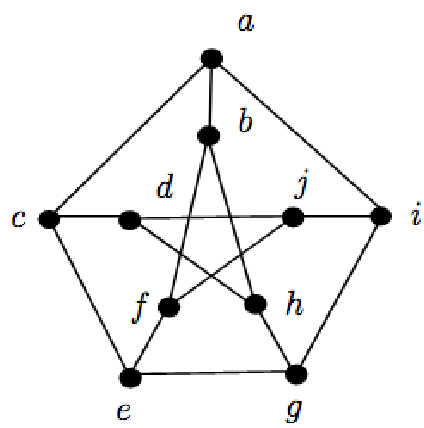
Podemos considerar as 64 casas de um tabuleiro de xadrez como os vértices de um grafo G onde dois vértices (quadrados) são ligados se cada casa puder ser alcançada por uma rainha na outra casa em um único movimento. Esse grafo G é geralmente chamado de Grafo da Rainha. Assim, queremos saber o menor número de rainhas que dominam todas as casas de um tabuleiro de xadrez.

NÚMERO DE DOMINAÇÃO DE UM GRAFO

Um conjunto de vértices de G é chamado de dominante se existe uma aresta ligando cada vértice de G que não está neste conjunto. O número de dominação é o número de vértices em um menor conjunto dominante de G.



(a)



(b)

SEGURANÇA NAS ESCOLAS

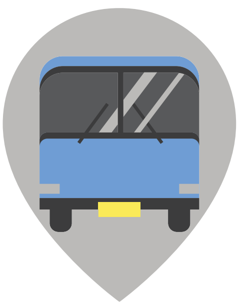
Suponha que um cidade tenha oito escolas conectadas por estradas. A tabela abaixo nos diz quais escolas de ensino médio estão conectadas por uma estrada, onde um S é dado se a distância entre as duas escolas for menor que cinco quilômetros. Devido a restrições orçamentárias, apenas um número mínimo de estações de segurança pode ser construído.

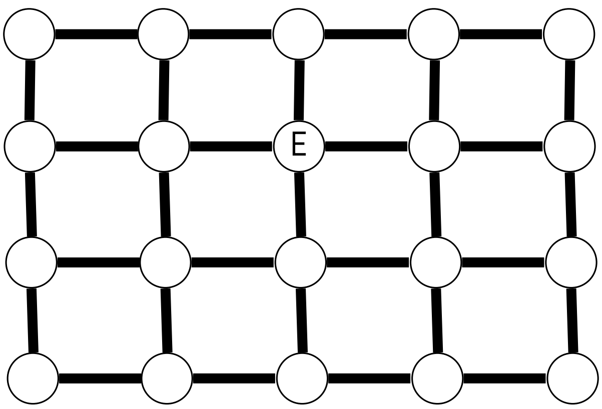
	A	B	C	D	E	F	G	H
A	-	S	S	-	S	-	-	-
B	S	-	-	S	-	S	-	-
C	S	-	-	S	S	-	-	S
D	-	S	S	-	-	-	-	-
E	S	-	S	-	-	S	-	S
F	-	S	-	-	S	-	S	-
G	-	-	-	-	-	S	-	S
H	-	-	S	-	S	-	S	-

Qual é o menor número de estações de segurança que devem ser construídas? Dê um conjunto de escolas onde elas possam ser colocadas.

NÚMERO IDEAL DE PARADAS DE ÔNIBUS

Suponha que uma cidade tenha aprovado uma regra que diz que nenhuma criança do ensino fundamental deve caminhar mais de um quarteirão até a escola ou até um ponto de ônibus. Devido ao aumento do preço do combustível, os ônibus precisam diminuir o número de paradas. Determine o menor número de paradas que o motorista de ônibus teria que fazer para que, para cada interseção no grafo abaixo, haja um ponto de ônibus ou a escola E a não mais de um quarteirão de distância.





BRINCADEIRA MATEMÁTICA

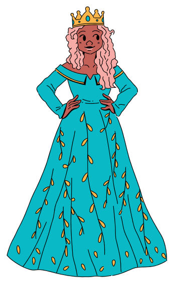
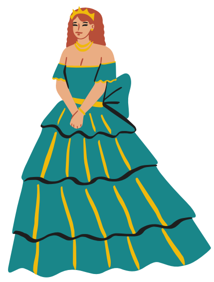
Dominação do Grafo

O jogo de dominação de grafos usa um grafo como um tabuleiro. O jogo ilustra o conceito de dominação da teoria dos grafos. Se você é familiarizado com jogos de guerra reconhecerão "dominação" como abrangendo algumas das mesmas questões que são cobertas por zonas de controle.

COMO JOGAR

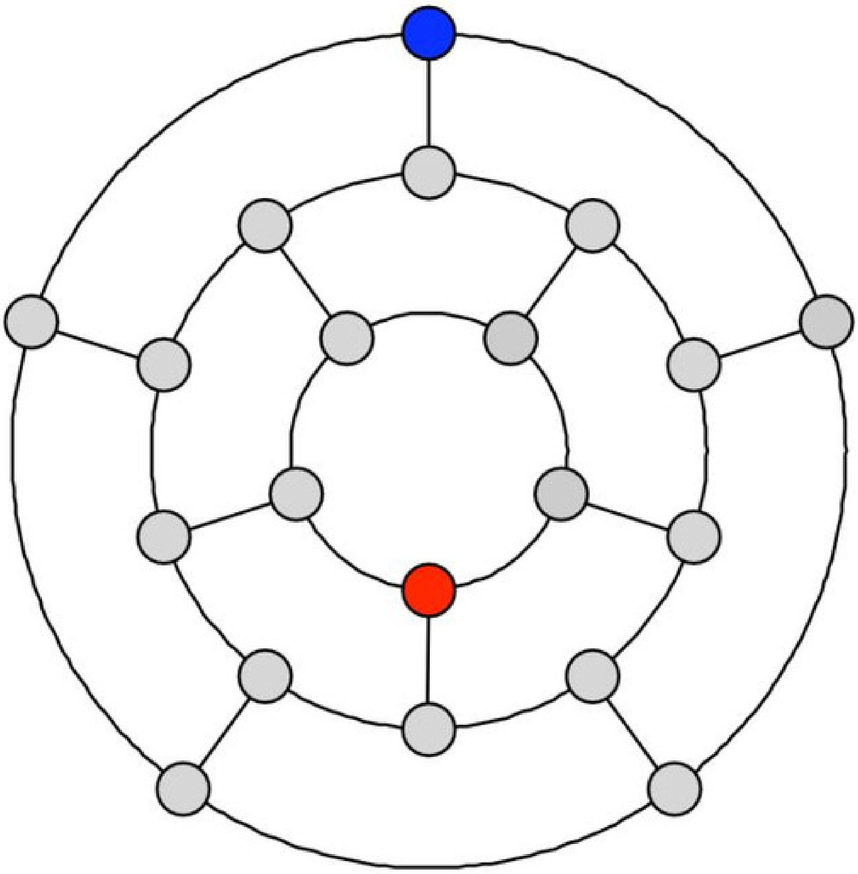
1. Cada jogador irá jogar com uma ficha de um tipo. O jogador A se move primeiro e depois os jogadores se revezam fazendo movimentos.
2. Cada jogador tem um ponto de entrada. O ponto de entrada do jogador A é o vértice azul, o ponto de entrada do jogador B é o vermelho.
3. Cada círculo no tabuleiro, incluindo os pontos de entrada, é chamado de vértice. As linhas que unem os vértices são chamadas de arestas. Dois vértices com uma aresta entre eles são adjacentes.
4. Em seu turno, um jogador pode colocar sua ficha em seu ponto de entrada, se estiver desocupado no momento, ou pode mover uma de suas fichas de um vértice para um vértice adjacente, exceto conforme especificado na regra 5 abaixo.
5. Nenhum jogador pode colocar ou mover uma ficha para um vértice adjacente a um vértice ocupado por uma das fichas de seu oponente.
6. Um jogador deve colocar ou mover uma ficha em cada turno, a menos que isso seja impossível devido à regra 5. Nesse caso, o jogador não faz nada durante esse turno.
7. O jogo continua até que nenhum jogador possa se mover.
8. No final do jogo a pontuação de um jogador é de três pontos para cada vértice ocupado por uma de suas fichas. Cada vértice desocupado vale um ponto para um jogador para cada ficha adjacente a esse vértice.
9. O jogador com a maior pontuação é o vencedor. Se as pontuações forem iguais, o jogo está empatado.
10. Os jogadores podem querer jogar dois jogos com cada jogador indo primeiro em um dos jogos e somar as pontuações dos dois jogos.



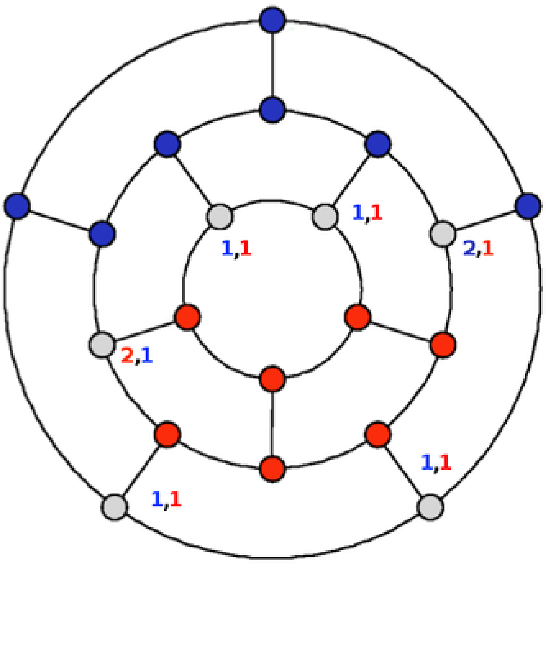
DOMINAÇÃO DO GRAFO

Aqui está um exemplo do tipo de grafo que pode ser usado com tabuleiro. Este grafo é na verdade baseado em um dodecaedro que você pode reconhecer como um dado de 12 lados.



EXEMPLO DE PONTUAÇÃO

Primeiro, ignorando todos os números vermelhos e azuis, veja que nenhum dos jogadores pode se mover. Lembre-se de que você não pode se mover para um vértice adjacente às peças do seu oponente. Os pontos de entrada são os mesmos do tabuleiro dado acima.



Para este tabuleiro existem 7 fichas azuis e 7 vermelhas, então cada jogador marca 21 pontos. Os vértices desocupados (cinza) são todos anotados com o número de vizinhos de cada cor que eles possuem – que é a pontuação adicional por estar próximo a um vértice vazio. Então o azul ganha 2+1+1+1+1+1 ou 7 pontos adicionais; mas vermelho também! Isso significa que este jogo empata em 28 todos.

LISTA DE EXERCÍCIOS

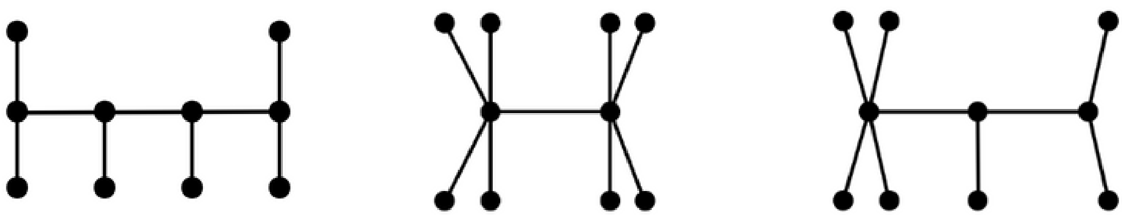
A MATEMÁTICA DO GÊNIO INDOMÁVEL

O filme "Gênio Indomável" conta a história de Will Hunting, que apesar de sua inteligência excepcional trabalha como zelador no Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT) em Boston. Lá, ele um dia vê um problema no quadro-negro deixado por um professor premiado com a Medalha Fields chamado Gerald Lambeau. De volta ao MIT no dia seguinte, ele não consegue evitar fornecer sua solução anonimamente no quadro-negro. Como Will não assinou seu trabalho no quadro para sua solução do primeiro problema, o professor Lambeau colocou um segundo problema, do qual ele afirma para sua turma “demoramos mais de dois anos para resolver”.

O problema era o seguinte: desenhe todas as árvores homomorficamente irredutíveis com 10 vértices. Uma árvore é um grafo que não possui ciclos, ou seja, um grafo que não tem nenhum caminho que começa num vértice e termina no mesmo vértice. Um árvore homomorficamente irredutível é aquela sem vértices de grau 2, ou seja, cada vértice não pode estar conectado a exatamente dois outros vértices.

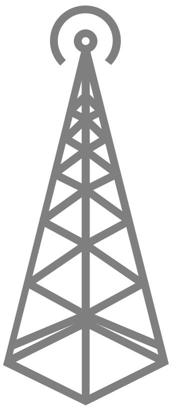
O professor Lambeau olha impressionado para a solução correta para o segundo problema, fornecida pelo zelador anônimo que ele acabara de afugentar. Foto: © 1997 Miramax Pictures

Encontre todas as as árvores homomorficamente irredutíveis com 10 vértices. Abaixo estão três destas árvores, encontre as outras.

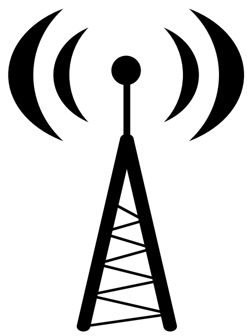


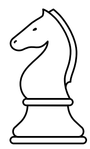
COMUNICAÇÃO NA SELVA

Suponha que tenhamos uma coleção de pequenas aldeias no Amazonas. Gostaríamos de ter estações de rádio em algumas dessas aldeias para que as mensagens possam ser transmitidas a todas as aldeias da região. Como cada estação de rádio tem um alcance de transmissão limitado, 50 milhas, precisamos usar várias estações para alcançar todas as aldeias. As localizações das dez aldeias são dadas na grade abaixo com as distâncias entre as aldeias em milhas. Qual é o menor número de estações que precisam ser construídas?



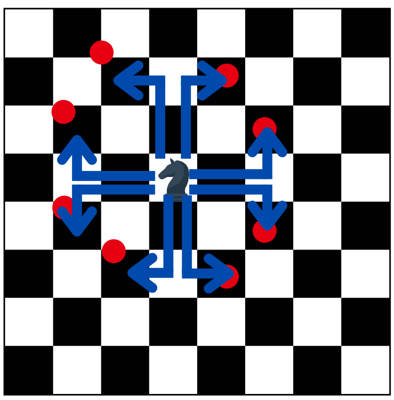
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	-	40	45	40	-	-	-	-	65	-
B	40	-	40	-	30	30	-	-	-	-
C	45	40	-	40	-	-	-	-	50	-
D	40	-	40	-	-	-	60	-	-	-
E	-	30	-	-	-	30	-	-	-	70
F	-	30	-	-	30	-	45	45	-	-
G	-	-	-	60	-	45	-	45	-	-
H	-	-	-	-	-	45	45	-	50	50
I	65	-	50	-	-	-	-	50	-	50
J	-	-	-	-	70	-	-	50	50	-





PASSEIO DO CAVALO

O Cavalo é a única peça do xadrez que pode saltar sobre outras peças. Ele tem um movimento em formato de "L" : duas casa no sentido vertical ou horizontal e uma casa no outro sentido. Veja a imagem abaixo.

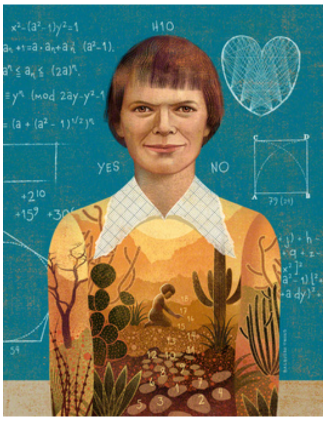


Seguindo as regras de movimento do cavalo, é possível que um cavalo parta de uma casa qualquer, percorra todo o tabuleiro visitando cada casa uma única vez e retorne à casa inicial? Veja o exemplo abaixo de um tabuleiro 5 X 5, onde cada número representa a ordem dos espaços ocupados, sendo 1 o ponto de partida.

1	24	19	14	3
18	13	2	9	20
23	8	25	4	15
12	17	6	21	10
7	22	11	16	5

Você conseguiria encontrar um passeio do cavalo num tabuleiro 8 X 8?

PERSONALIDADES MATEMÁTICAS



Julia Robinson

Julia Hall Bowman Robinson foi uma matemática americana mais conhecida por seu trabalho sobre problemas de decisão e o décimo problema de Hilbert.
Robinson nasceu em St. Louis, Missouri, filha de Ralph Bowers Bowman e Helen (Hall) Bowman.

Ela entrou na Universidade Estadual de San Diego em 1936 e foi transferida para a Universidade da Califórnia, Berkeley, em 1939. Ela recebeu seu diploma de bacharel em 1940 e continuou seus estudos de pós-graduação. Ela recebeu o Ph.D. em 1948 sob Alfred Tarski com uma dissertação sobre "Definibilidade e Problemas de Decisão em Aritmética".

Excelência no campo da matemática, Julia Robinson (1919-1985) foi fundamental na solução do décimo problema de Hilbert — encontrar um método eficaz para determinar se uma dada equação diofantina é solúvel com números inteiros. Durante um período de duas décadas, ela desenvolveu a estrutura sobre a qual a solução foi construída.

Em reconhecimento às suas realizações, Julia Robinson tornou-se a primeira mulher matemática eleita para a Academia Nacional de Ciências, a primeira mulher presidente da Sociedade Americana de Matemática e a primeira mulher matemática a receber uma bolsa da Fundação MacArthur.

Robinson nunca se considerou uma pessoa brilhante. Ao refletir sobre sua vida, ela se concentrou na paciência que lhe serviu tão bem como matemática.

“O que eu realmente sou é uma matemática”, disse Robinson. “Ao invés de ser lembrada como a primeira mulher isto ou aquilo, prefiro ser lembrada, como uma matemática deve, simplesmente pelos teoremas que provei e pelos problemas que resolvi.”