CÍRCULO MATEMÁTICO DA UFSC

Prof. Raphael da Hora
Encontro do dia 15/06/2022

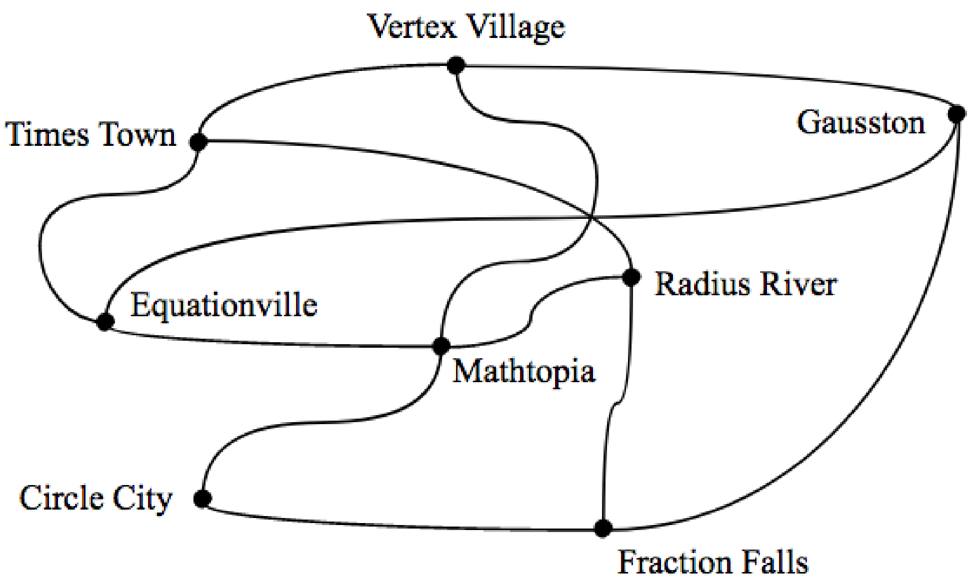
Nome:

MELHORES CAMINHOS

PROBLEMAS DO ENCONTRO

CICLO HAMILTONIANO

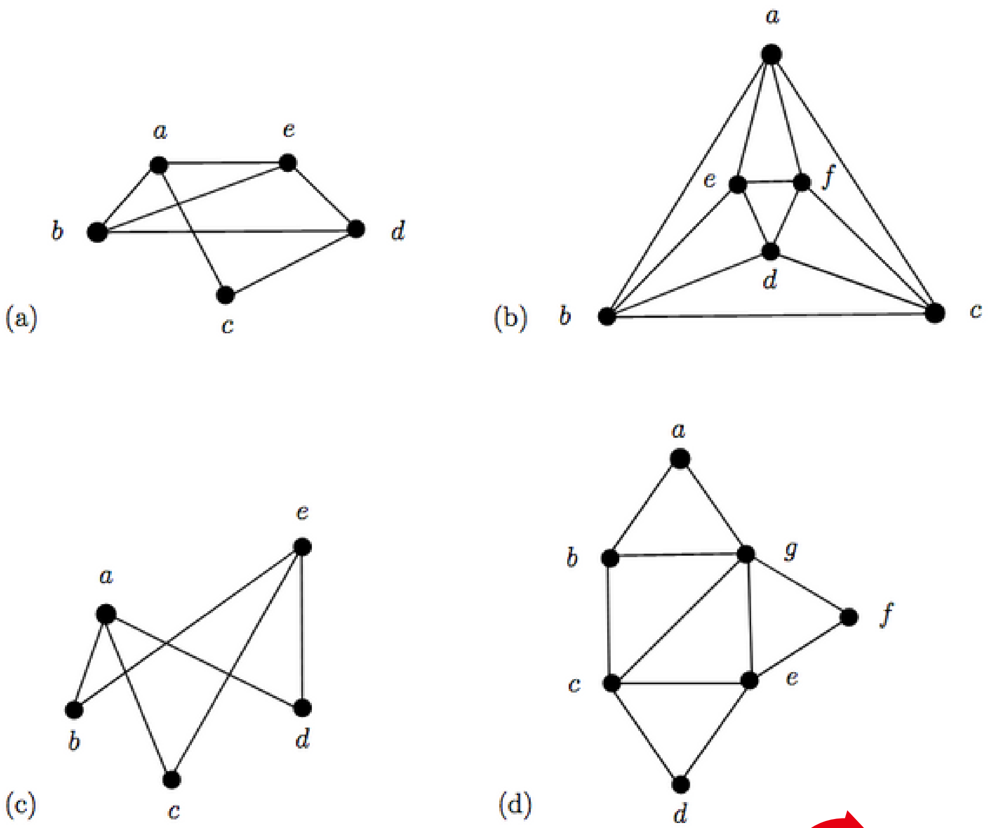
Euler Petróleo é uma rede de postos de gasolina no país de Mathisfun. O CEO da empresa, Leonhard, quer visitar todos os seus postos de gasolina no país para garantir que cada um esteja abastecido com combustível suficiente. No entanto, ele não quer visitar nenhuma cidade mais de uma vez, pois é um homem muito ocupado. Sugira uma rota que Leonhard poderia tomar da sede na capital Mathtopia, passando por cada cidade exatamente uma vez, e retornando à capital. Observe que, apesar da intersecção de três rodovias no centro do país, não há como mudar de uma estrada para outra (ou seja, não há estrada direta de Mathtopiato a Gausston, etc.)



Um caminho é chamado de Hamiltoniano se visita cada vértice apenas uma única vez. Se os pontos de partida e chegada são os mesmos, ou seja, o caminho começa e termina no mesmo vértice, o caminho é chamado de ciclo Hamiltoniano.

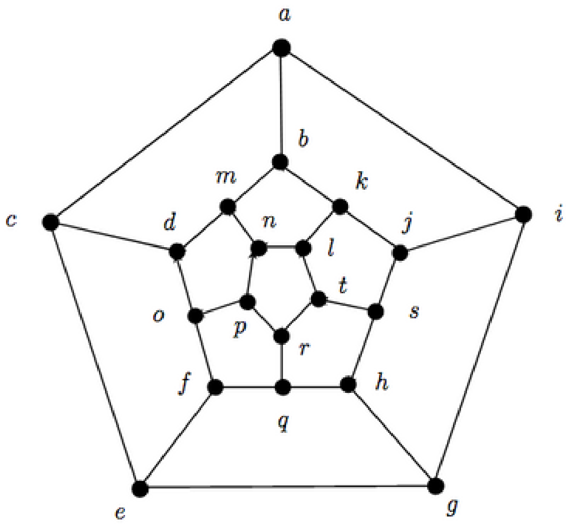
PASSEIO EM GRAFOS

Determine se os gráficos a seguir contêm um ciclo hamiltoniano. Se o grafo não contém um ciclo hamiltoniano, ele contém um caminho hamiltoniano?



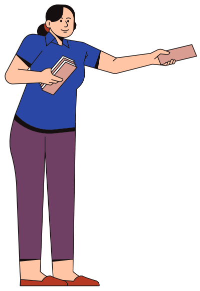
JOGO DE HAMILTON

Em 1857, Sir William Rowan Hamiltonian, um conhecido matemático irlandês, inventou um jogo que consistia em mover um pino colocado em cada vértice de um grafo. O objetivo do jogo era passar por cada vértice exatamente uma vez; o jogador começa e termina no mesmo vértice e só pode passar de um vértice para outro se uma aresta sair entre os vértices. Tente encontrar um ciclo Hamiltoniano a partir do vértice "a".



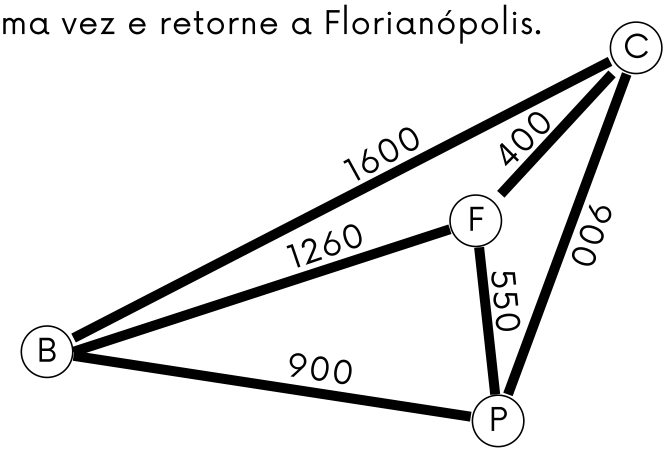
PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE 

Suponha que você seja um vendedor que mora em Florianópolis. Você quer viajar para várias cidades diferentes, digamos Curitiba, Bagé, Porto Alegre, exatamente uma vez e depois voltar para casa em Florianópolis. A lista abaixo representa as viagens e os custos de fazer uma viagem entre as cidades.



Viagem	Custo
Florianópolis - Curitiba	RS 400
Florianópolis - Porto Alegre	RS 550
Florianópolis - Bagé	RS 1.260
Curitiba - Porto Alegre	RS 900
Curitiba - Bagé	RS 1.600
Porto Alegre - Bagé	RS 750

Como você é dono do seu negócio, é importante usar o mínimo de dinheiro para sua viagem. Para economizar dinheiro, tente encontrar a rota mais barata que começa em Florianópolis, visite cada uma das outras cidades exatamente uma vez e retorne a Florianópolis.

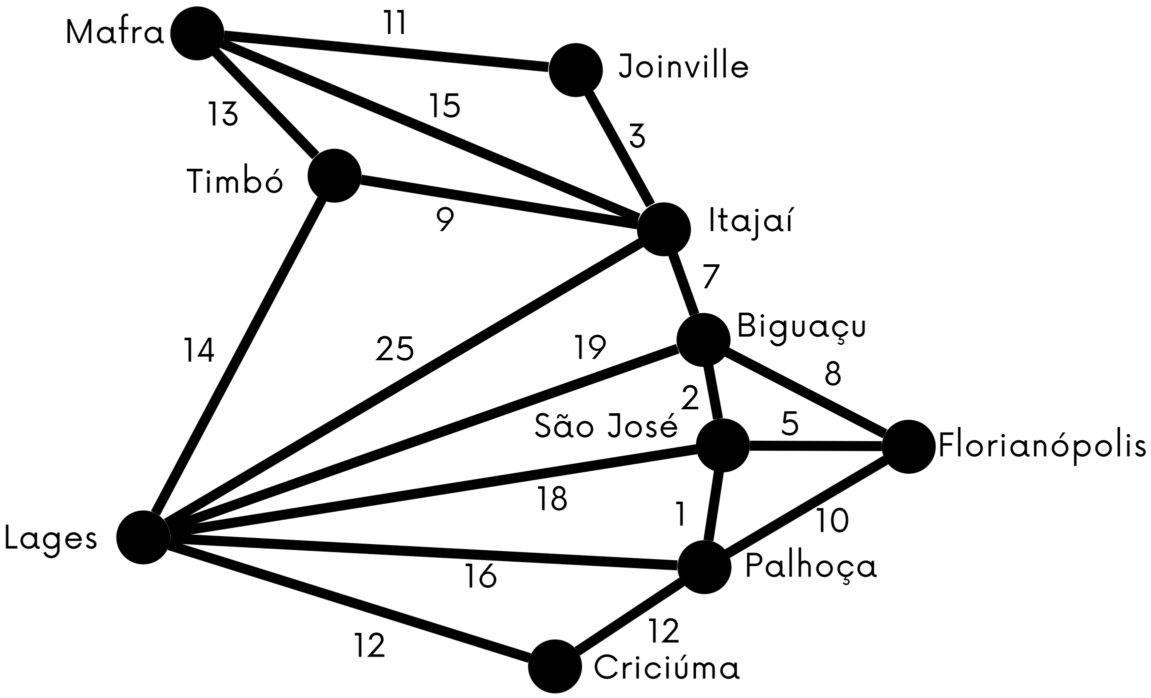


O problema do caixeiro viajante faz a seguinte pergunta: "Dada uma lista de cidades e as distâncias entre cada par de cidades, qual é a rota mais curta possível que visita cada cidade exatamente uma vez e retorna à cidade de origem?"

Esse problema atrai bastante atenção porque é fácil de descrever, mas é bem difícil de resolver. De fato, ele pertence à classe de problemas de otimização combinatória conhecidos como NP-completos. Isso significa que ele é classificado como NP-difícil porque não possui solução “rápida” e a complexidade de calcular a melhor rota aumentará quando você adicionar mais destinos ao problema.

REDE FERROVIÁRIA CATARINENSE

No grafo abaixo, tente conectar todas as cidades com ferrovias pelo menor custo total. O número de cada aresta representa o custo em dezenas de milhões de reais.



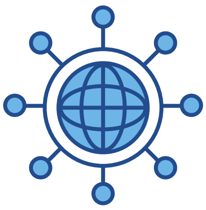
ALGORITMO DE PRIM

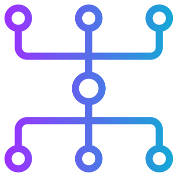
Em vez de simplesmente tentar todas as combinações possíveis, os matemáticos desenvolveram um algoritmo ou uma série de etapas a serem seguidas para determinar uma chamada árvore geradora mínima. Um desses algoritmos é conhecido como Algoritmo de Prim. Os passos deste algoritmo são os seguintes:

Passo 1. Selecione um vértice inicial (no nosso exemplo, escolheremos Itajaí);
Passo 2. Chame S o conjunto de todos os vértices atualmente conectados à sua árvore. Chame V todos os outros vértices. (Observe que na primeira vez que você chegar a esta etapa, S será apenas seu vértice inicial);
Passo 3. Se S contiver todos os vértices do grafo, pare. Você tem sua árvore geradora mínima!
Passo 4. Encontre todas as arestas com uma extremidade em S e uma extremidade em V. Selecione a aresta com o menor peso e adicione-a à sua árvore. Se houver mais de uma aresta com o menor peso, você pode escolher qualquer uma delas para adicionar. (Por enquanto, para adicionar uma aresta à sua árvore, apenas circule ou destaque a aresta);
Passo 5. Volte para a etapa 2

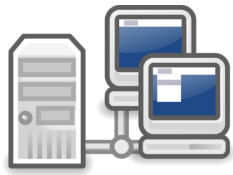
REDE DE COMPUTADORES

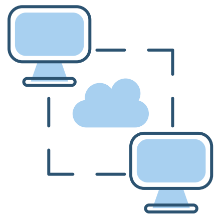
Suponha que em sua escola, seis computadores em seis salas diferentes precisem estar conectados em rede. Sua escola quer a "melhor" rede possível, ou seja, use a menor quantidade de fios para conectar todos os computadores. Observe que a conexão entre dois computadores pode ser vinculada direta ou indiretamente através de outro computador. A tabela abaixo mostra quais computadores podem ser conectados diretamente, bem como quanto de fio é necessário em metros, onde os computadores são letras e as distâncias em metros. Qual é a quantidade mínima de fio necessária para conectar todos os seis computadores para que cada computador esteja ligado direta ou indiretamente a qualquer outro computador?





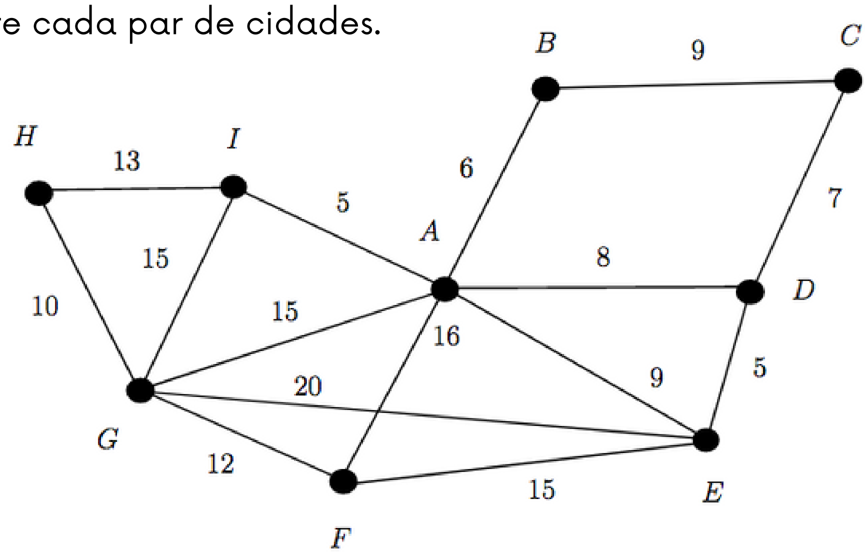
	A	B	C	D	E	F
A	-	9	-	-	-	3
B	9	-	8	-	8	11
C	-	8	-	3	5	-
D	-	-	3	-	6	11
E	-	8	5	6	-	9
F	3	11	-	11	9	-





EMERGÊNCIA EM ESTRADAS

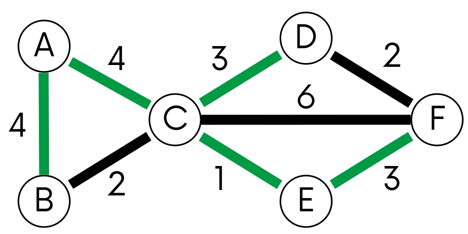
Suponha que, ao fazer planos para tempestades de inverno, o governo de seu estado precise de um projeto para reparar as estradas em caso de emergência. Você recebe um mapa das cidades do seu estado e as principais estradas que existentes entre elas. Você é solicitado a elaborar um plano que conserte o menor número de quilômetros de estrada, mas mantenha uma rota aberta entre cada par de cidades.



ALGORITMO DE DIJKSTRA

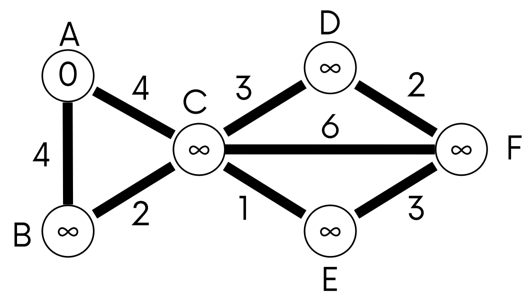
O algoritmo de Prim funciona bem se quisermos encontrar, por exemplo, a maneira mais barata de criar trilhos de trem de forma que ainda possamos visitar cada local. Mas e se eu quiser encontrar a maneira mais rápida de ir do ponto A ao ponto B? É aí que entra o algoritmo de Dijkstra. Ele pode nos ajudar a encontrar o caminho mais barato ou rápido entre dois vértices de um determinado grafo.

Um caminho mais curto é uma árvore que contém os caminhos mais curtos de um vértice "inicial" para qualquer outro vértice do grafo. Veja o exemplo abaixo.



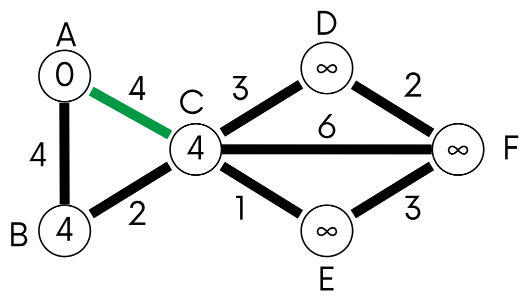
Na árvore verde ao lado, A é nosso vértice inicial. Observe que, se não quisermos repetir vértices ou arestas, há apenas um caminho de A para cada vértice na árvore verde. Esse caminho único é o caminho mais curto de A para esse vértice.

Passo 1



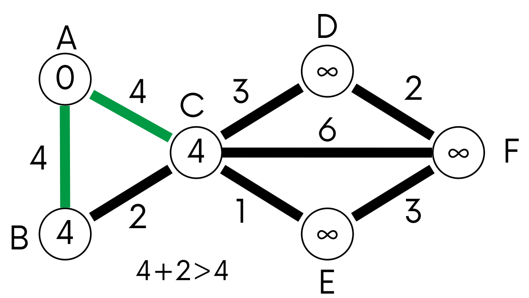
Escolha um vértice inicial e atribua valores de caminho infinito (∞) a todos os outros vértices;

Passo 2



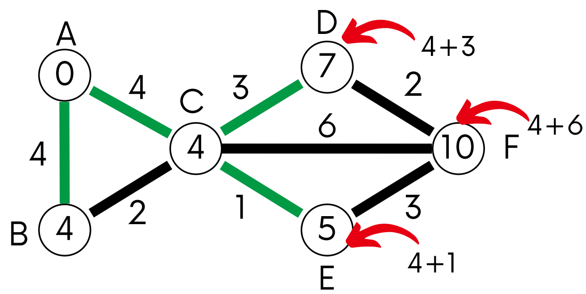
Escolha o vértice vizinho que tem o menor custo. Se houver vários vértices com o menor custo, escolha qualquer um desses vértices;

Passo 3



Se o comprimento do caminho do vértice adjacente for menor que o comprimento do novo caminho, não o atualize;

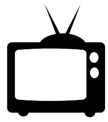
Passo 4



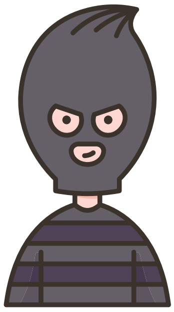
Após cada passo, escolhemos o vértice não visitado com o menor comprimento do caminho. Então escolhemos 5 antes de 7.

Agora, podemos ver que o caminho passando por E é mais curto que ir diretamente de C para F, pois 5 + 3 é menor que 4 + 6.

GRAFOS NA TV



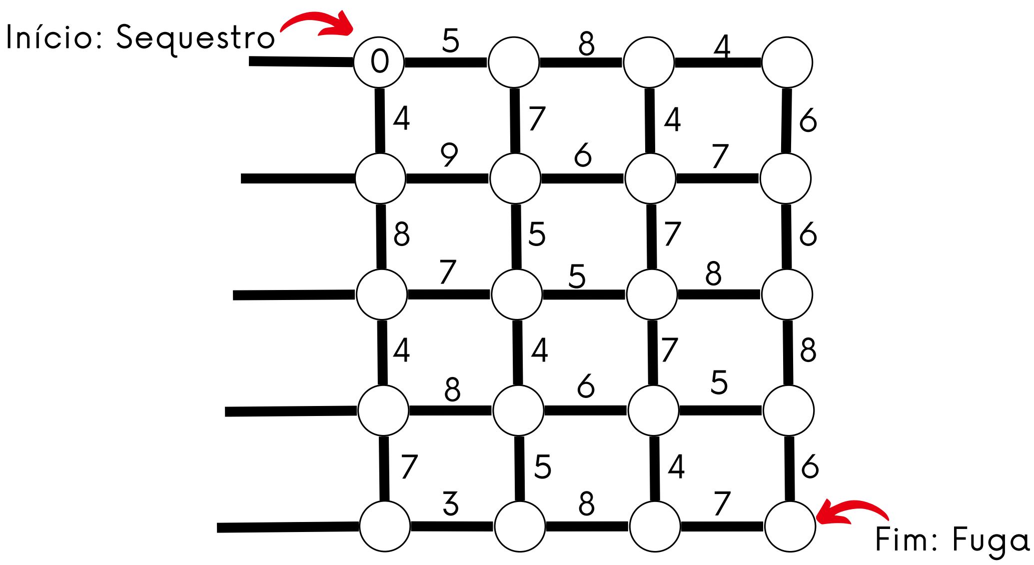
Num episódio da série "Numb3rs", um caminhão blindado transportando dinheiro e remédios que serão doados à África é sequestrado. Os sequestradores querem sair o mais rápido possível de Los Angeles, Charlie trata de determinar possíveis rotas e os respectivos tempos de fuga. No entanto, em vez de calcular os tempos para cada rota de fuga possível, Charlie usa o algoritmo de Dijkstra para calcular as rotas mais prováveis que os sequestradores podem ter usado para escapar de Los Angeles. Na tabela abaixo, os locais onde um carro pode mudar de uma rua para outra são os vértices A, B, C, D, E, F, G e H. O tempo (em minutos) necessário para viajar entre dois vértices é dado na tabela abaixo.

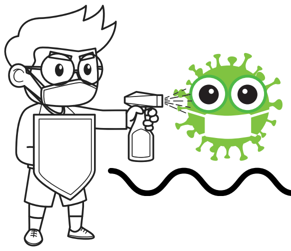


	A	B	C	D	E	F	G	H
A	-	5	-	-	-	14	-	-
B	5	-	7	12	8	-	-	-
C	9	7	-	6	-	5	15	-
D	-	12	6	-	12	-	8	11
E	-	8	-	12	-	-	-	5
F	14	-	5	-	-	-	10	-
G	-	-	15	8	-	10	-	9
H	-	-	-	11	5	-	9	-

MELHOR ROTA DE FUGA

O grafo abaixo representa um mapa da cidade com o tempo, em minutos, necessário para dirigir de interseção a interseção. Encontre um possível caminho ideal do ponto de sequestro até o ponto de fuga.





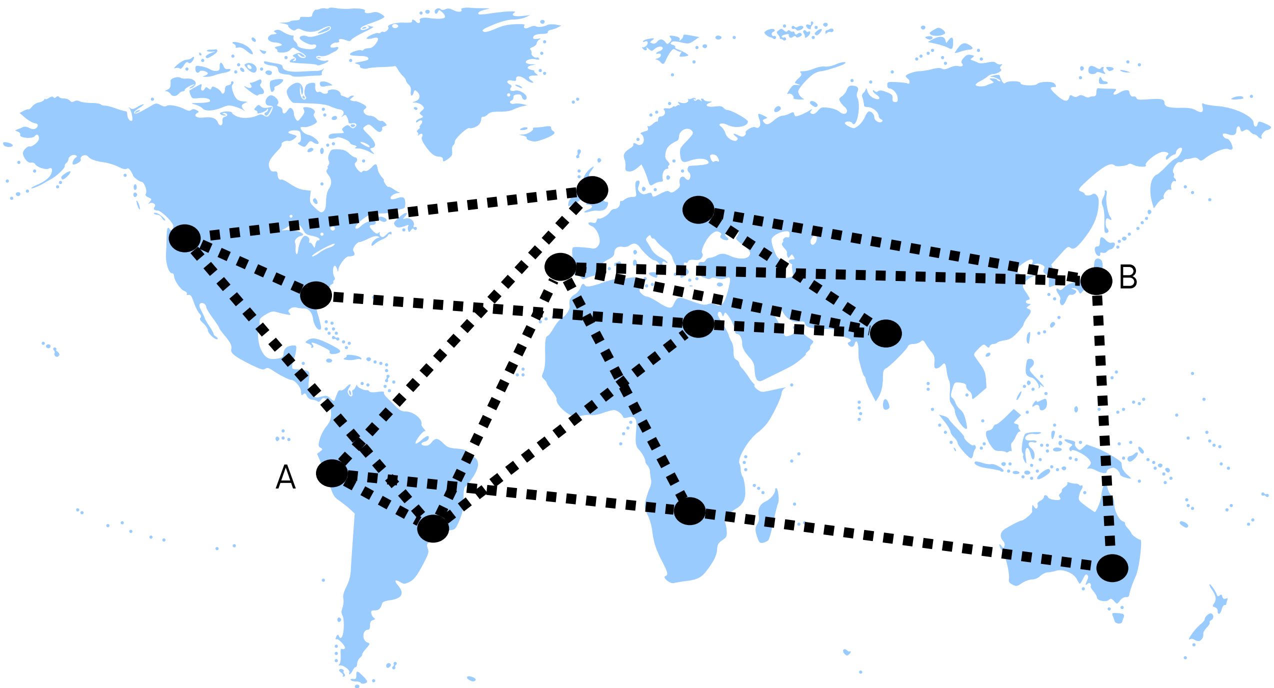
BRINCADEIRA MATEMÁTICA

Pare a Propagação do Vírus

Um vírus mortal está se espalhando pelo mundo infectando pessoas nos aeroportos. Um jogador é o vírus e o outro são humanos tentando impedir seu caminho. O jogador que é o vírus começa no Peru e tenta chegar ao Japão tomando rotas populares de viagens aéreas, conectando pontos. O jogador que é o humano deve tentar fechar as rotas uma de cada vez cancelando os voos (cruzando as linhas).

COMO JOGAR

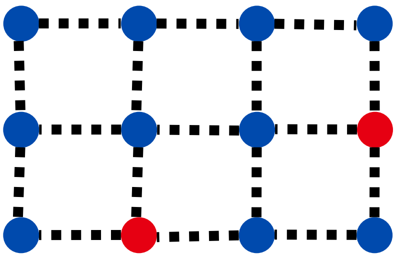
O jogo é jogado em um grafo com dois vértices especiais, A e B. Cada aresta do gráfico pode ser marcada ou removida. Os dois jogadores são chamados de Junta e Corta, e eles se revezam para se mover. Na vez de Corta, ele exclue uma aresta não marcada do gráfico. Na vez de Junta, ele marca a linha tracejada, fazendo uma aresta conectando dois vértices do grafo. Se Corta conseguir transformar o gráfico em um em que A e B não estejam mais conectados, ele ganha. Se Junta conseguir criar um caminho de A a B, ele ganha. Um dos dois jogadores tem que vencer.

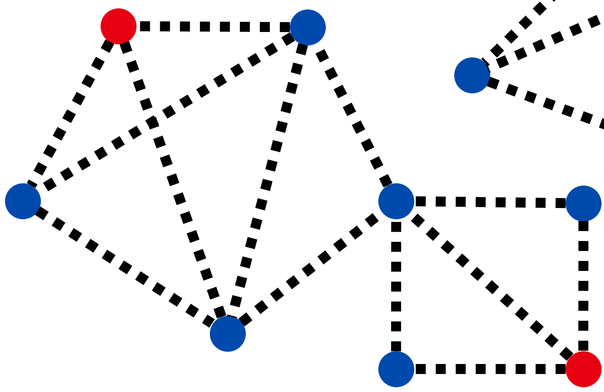


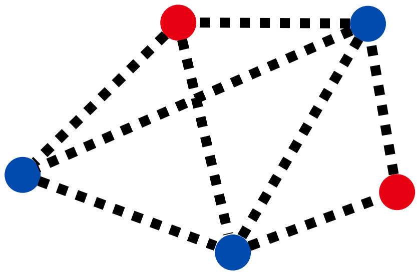
Jogue uma vez, apague tudo e jogue novamente.

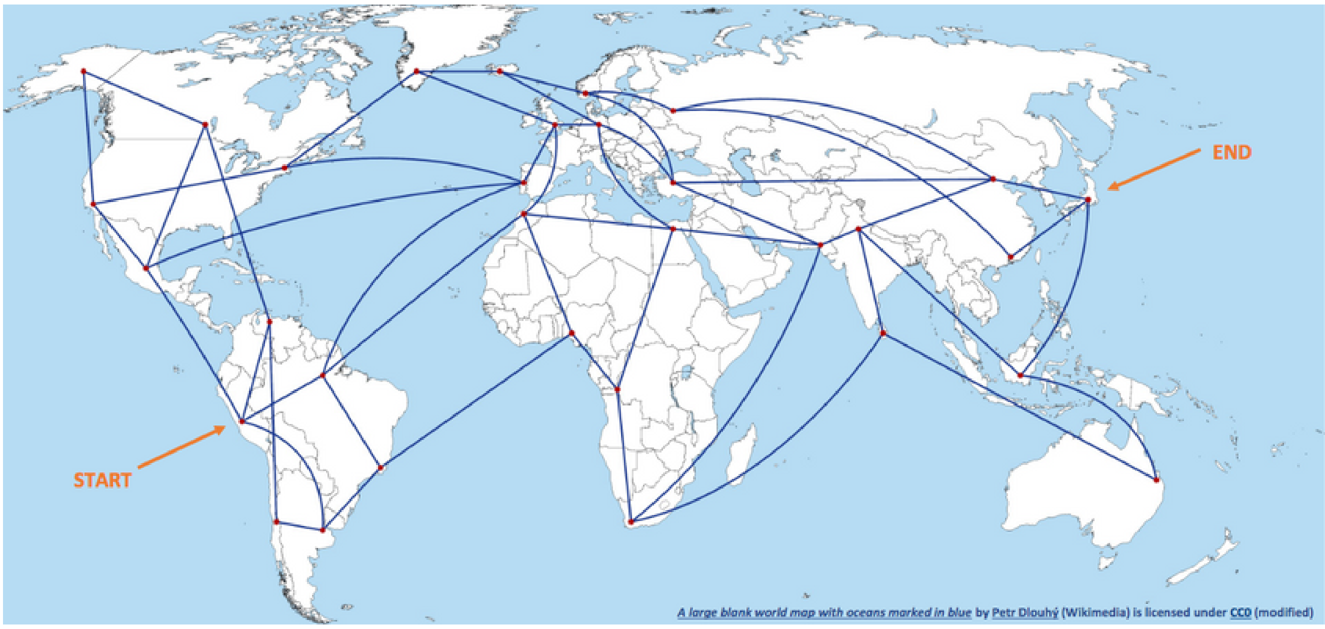
JOGO DO JUNTA OU CORTA

Junta quer construir um caminho entre os dois vértices vermelhos. Corta tem que impedir que Junta alcance esse objetivo. Na vez de Junta, ele desenha uma aresta (uma linha que une dois vértices), marcando a linha tracejada. Corta exclui uma aresta desenhando uma cruz (X) sobre ela. Encontre um parceiro, escolha o papel que você quer desempenhar e quem dá o primeiro passo, e jogue o jogo. Em seguida, troque os papéis e jogue novamente. Você acha que Junta ou Corta tem uma estratégia vencedora? Você acha que dar o primeiro passo é importante?







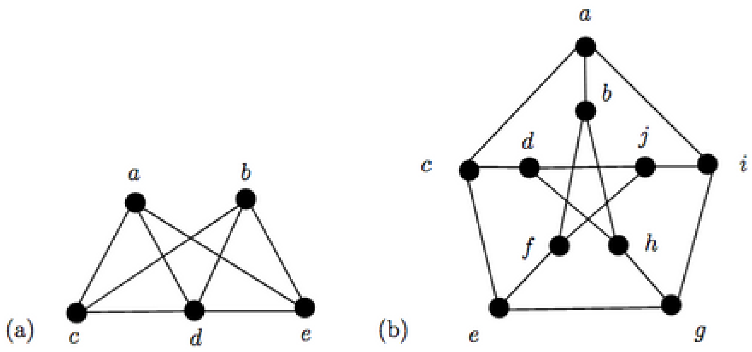


Primeiro decida se você quer jogar Junta ou Corta. Começando com quatro vértices (pontos) desenhe um grafo e jogue o jogo com um parceiro. Você pode desenhar um grafo que você sempre tenha uma estratégia vencedora? Tente fazer novamente com cinco vértices ao invés de quatro.

LISTA DE EXERCÍCIOS

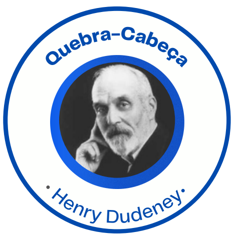
CICLOS E CAMINHOS HAMILTONIANOS

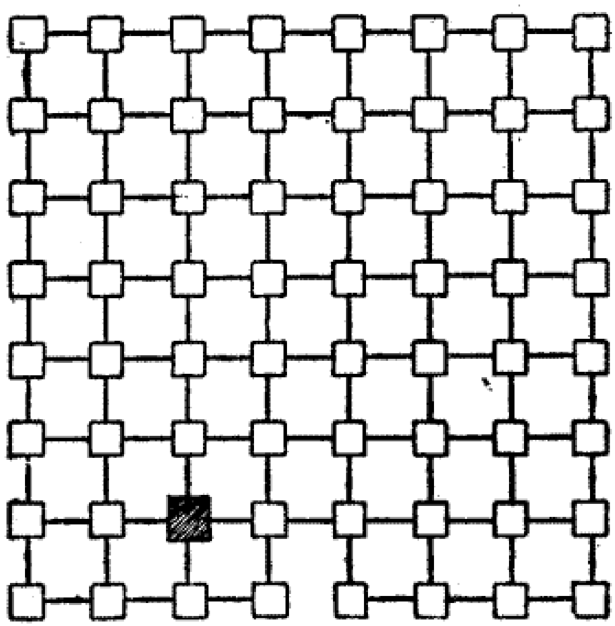
Determine se os grafos a seguir contêm um ciclo hamiltoniano. Se o grafo não contém um ciclo hamiltoniano, ele contém um caminho hamiltoniano?



O QUEBRA-CABEÇA DO HOMEM DO PERDÃO

O gentil Homem do Perdão, "o que veio direto da corte de Roma", implorou para ser dispensado; mas a empresa não o pouparia. "Amigos e companheiros de peregrinos", disse ele, "na verdade, o enigma que fiz é apenas uma coisa pobre, mas é o melhor que pude inventar. Culpe minha falta de conhecimento de tais assuntos se não seja do seu agrado." Mas sua invenção foi muito bem recebida. Apresentou o plano que o acompanhava e disse que representava sessenta e quatro cidades pelas quais teve que passar durante algumas de suas peregrinações, e as linhas que as ligavam eram estradas. Ele explicou que o quebra-cabeça era começar na grande cidade negra e visitar todas as outras cidades uma vez, e apenas uma vez, em quinze peregrinações consecutivas. Tente traçar a rota em quinze linhas retas com o seu lápis. Você pode terminar onde quiser, mas note que a omissão de uma estradinha no fundo é intencional, pois parece que era impossível ir por aquele caminho.

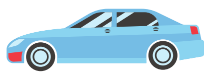




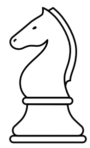
MELHOR CAMINHO DE VENDA

Suponha que você seja um vendedor que mora em Florianópolis. Você precisa viajar para várias cidades diferentes em Santa Catarina, Blumenau, Chapecó e Lages exatamente uma vez e depois voltar para casa em Florianópolis. A lista abaixo representa as viagens que estão disponíveis para você e a distância em quilômetros entre as cidades.

Viagem	Distância
Florianópolis - Blumenau	150
Florianópolis - Chapecó	555
Florianópolis - Lages	230
Blumenau - Chapecó	477
Blumenau - Lages	225
Chapecó - Lages	330

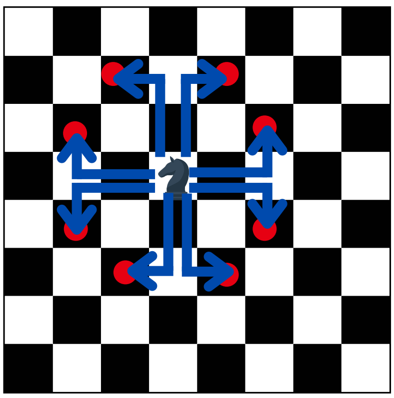


Como você vai com o carro da empresa, é importante percorrer a quantidade mínima de quilômetros em sua viagem. Para economizar quilometragem, tente encontrar a rota mínima que começa em Florianópolis, visita cada uma das outras cidades exatamente uma vez e retorna a Florianópolis.



PASSEIO DO CAVALO

O Cavalo é a única peça do xadrez que pode saltar sobre outras peças. Ele tem um movimento em formato de "L" : duas casa no sentido vertical ou horizontal e uma casa no outro sentido. Veja a imagem abaixo.



Seguindo as regras de movimento do cavalo, é possível que um cavalo parta de uma casa qualquer, percorra todo o tabuleiro visitando cada casa uma única vez e retorne à casa inicial? Veja o exemplo abaixo de um tabuleiro 5 X 5, onde cada número representa a ordem dos espaços ocupados, sendo 1 o ponto de partida.

1	24	19	14	3
18	13	2	9	20
23	8	25	4	15
12	17	6	21	10
7	22	11	16	5

Você conseguiria encontrar um passeio do cavalo num tabuleiro 8 X 8?

PERSONALIDADES MATEMÁTICAS

Leonhard Euler

Leonhard Euler foi um dos pensadores da matemática, estabelecendo uma carreira como acadêmico e contribuindo muito em geometria, trigonometria e cálculo, entre muitos outros. Ao longo de sua carreira, Euler apresentou uma série de princípios que lançaram as bases para grande parte da matemática moderna como a conhecemos.

Leonhard frequentou uma escola básica em Basel e durante esse tempo viveu com sua avó por parte de mãe. Esta escola era bastante pobre e Euler não aprendeu matemática alguma na escola. No entanto, seu interesse pela matemática certamente foi despertado pelo ensino de seu pai, e ele lia textos de matemática por conta própria.

Ele entrou na Universidade em 1720, aos 14 anos, primeiro para obter uma educação geral antes de seguir para estudos mais avançados. Johann Bernoulli logo descobriu o grande potencial de Euler para a matemática.

Em 1723 Euler completou seu mestrado em filosofia comparando e contrastando as ideias filosóficas de Descartes e Newton. Começou seus estudos de teologia no outono de 1723, seguindo os desejos de seu pai, mas, embora fosse um cristão devoto por toda a vida, não conseguiu encontrar o entusiasmo pelo estudo de teologia, grego e hebraico que encontrou em matemática. Euler obteve o consentimento de seu pai para mudar para a matemática. Mudou-se para a Rússia em 1727, serviu na marinha antes de ingressar na Academia de São Petersburgo como professor de física e depois chefiar sua divisão de matemática.

O legado de Euler tem sido enorme em termos de moldar o moderno campo de atuação da matemática e da engenharia, com seu trabalho homenageado por matemáticos de todo o mundo.