Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Círculos Matemáticos
Lista de Exercícios 07 (2023/1)

Profs. Eliezer Batista e Sérgio Tadao Martins

Exercício 1.

a) Mostre que para todo n natural positivo, temos que $(n+1)^n - 1$ é sempre divisível por n^2.

b) Conclua que $2^{n(2^n-1)} - 1$ é divisível por $(2^n - 1)^2$.

Exercício 2. Sejam a, b, c e d números inteiros quaisquer. mostre que o produto

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

é sempre divisível por 12.

Exercício 3. Sejam m e n números naturais positivos tais que $mn+1$ é divisível por 6. Mostre que $m+n$ também é divisível por 6.

Exercício 4. Mostre que $n^3 + 2n$ é sempre divisível por 3 para qualquer número natural n.

Exercício 5. Se $10a + b$ é divisível por 7, mostre que $a^3 - b^3$ também o é.

Exercício 6. Mostre que, para todo número inteiro positivo n, o número $n^7 - n$ é divisível por 42.

Exercício 7.

a) Mostre que o produto de quatro números consecutivos é sempre divisível por 24.

b) Mostre que o produto de cinco números consecutivos é sempre divisível por 120.

Exercício 8. Sejam m e n números inteiros não divisíveis por dois nem por três. Mostre que $m^4 - n^4$ é divisível por 48.

Exercício 9. Encontre o resto da divisão de

$$2019.2020.2021 + 2022^3$$

por 7.

Exercício 10. Encontre o último algarismo de $2022^{2022} + 2022^{2023}$.

Exercício 11.

a) Considere um número escrito na base 10:

$$N = a_n a_{n-1} ... a_3 a_2 a_1 a_0$$

Mostre que se $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... + (-1)^n a_n$ for divisível por 11, então o número N será divisível por 11.

b) Considere um número escrito na base 10:

$$N = a_n a_{n-1} ... a_3 a_2 a_1 a_0$$

Mostre que se $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ for divisível por 3, então o número N será divisível por 3.

Exercício 12. Sejam a e b números inteiros positivos e $a = bq + r$ com $0 \leq r < b$, mostre que $\text{mdc}(a,b) = \text{mdc}(b,r)$.

Exercício 13. Sejam a e b dois números inteiros quaisquer. Mostre que existem números inteiros m e n tais que $am + bn = \text{mdc}(a,b)$.

Exercício 14. Mostre que, para todo número inteiro positivo n, temos que

$$\text{mdc}(n, n+2) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad n \text{ é ímpar;} \\ 2, & \text{se} \quad n \text{ é par.} \end{cases}$$

Exercício 15. Sejam a e b dois números inteiros positivos, mostre que

$$\text{mdc}(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{mdc(a,b)} - 1.$$